

微積分
(Calculus)
参考資料

作成者^{*1}：星 埜 岳

^{*1}数式組版ソフト L^AT_EX による作成

目次

第1章 関数の極限 I	5
第2章 関数の極限 II	13
第3章 微分法	21
第4章 逆関数と微分	35
第5章 平均値の定理とテイラーの定理	41
第6章 テイラー展開の計算	53
第7章 積分 I	65
第8章 積分 II	71
第9章 部分積分と置換積分	75
第10章 広義積分	85

第1章 関数の極限 I

関数

関数

つぎつぎに異なる値をとる量 x を変数という. x と y にある関係があり x が与えられるとそれにしたがって y が決まる時 x を独立変数, y を従属変数という. 独立変数 x に対して従属変数 y がひとつに決まる仕組み (対応) を関数という. この対応を $y = f(x)$ とかく. 変数 x の動く範囲を関数 $f(x)$ の定義域, y が動く範囲を $f(x)$ の値域という.

イメージ

$x = a$ を入力 $\rightarrow$ 関数 $f(x)$ $\rightarrow y = f(a)$ が出力される

例. x に対して y の値が $y = x^2$ で決まる関数を 2 次関数といい

$$y = f(x) = x^2$$

とかく. 2 次関数は高校の数学でもよく知られているものである.

例. x に対して y の値が $y = \sqrt{x}$ で決まる関数を無理関数といい

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

とかく. 根号には負の数は代入できないので定義域は $x \geq 0$ となる.

例. $a > 0$ とする. x に対して y の値が $y = \log_a x$ で決まる関数を対数関数といい

$$y = f(x) = \log_a x$$

とかく. 真数条件により真数部分は正の値しか代入できないので定義域は $x > 0$ となる. $a = e$ のとき $\log_a x = \log x$ とかき, 自然対数という. 理工系の分野で対数関数という場合は多くの場合は自然対数のことを指す. ここで $e = 2.71828\dots$ はネイピア数とか自然対数の底と呼ばれる重要な定数である.

例. その他にも関数として指数関数 $y = f(x) = e^x$ や三角関数 $y = f(x) = \sin x$, $y = f(x) = \cos x$ などがある.

初等関数

以下の関数はそれぞれ, 初等関数と呼ばれている重要な関数である.

- $y = f(x) = x^n$ (自然数 $n \geq 1$)
- $y = f(x) = x^\alpha$ ($x > 0$, 実数 α)
- $y = f(x) = \sin x$
- $y = f(x) = \cos x$
- $y = f(x) = \tan x$ ($x \neq \pi/2 + n\pi$, 整数 n)
- $y = f(x) = a^x$ (定数 $a > 0$)
- $y = f(x) = \log_a x$ ($x > 0$, 定数 $a > 0$)

関数の極限

関数の極限 1

x を a に限りなく近づけたとき $f(x)$ が A に限りなく近づくことを $f(x)$ は A に収束するとい

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

とかく. A を極限值という.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ のことを $\lim$ の記号を使わずに

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

等とかくこともある.

例. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ である.

関数の極限 2

$x > 0$ の値を限りなく大きくしたとき $f(x)$ が A に限りなく近づくことを $f(x)$ は A に収束するとい

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

とかく. A を極限值という.

関数の極限 3

$x < 0$ のときに $x = -t$ と置き換えて t の値を限りなく大きくしたとき $f(x) = f(-t)$ が A に限りなく近づくことを $f(x)$ は A に収束するとい

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

とかく. A を極限值という. すなわち $x < 0$ を負の符号を持った数として絶対値を限りなく大きくしたときの極限值を上のように定義するのである.

発散

$f(x) = x^2$ の $x \rightarrow \infty$ の極限の様に極限值が ∞ となることを無限大に発散するとい

う. $-\infty$ となることを負の無限大に発散するとい

う. また三角関数 $f(x) = \sin x$ の $x \rightarrow \infty$ の極限を考える際に $\sin x$ は 1 と -1 の間の値を行き来するので, x をどれだけ大きな値としても特定の値に近づくことがなく極限值が定まらない. この様な場合を振動するとい

う. 無限大へ発散するのと振動することは状況が異なるが, 無限大, 負の無限大へ発散することと振動することをまとめて発散するとい

右側極限・左側極限

関数 $f(x)$ の $x = a$ における極限について x を右から a に近づける極限操作を右側極限といい

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

とかく. 同様に x を左から a に近づける極限操作を左側極限といい

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

とかく. $x = a$ における極限值が確定することの必要十分条件は

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

が成り立つことである. $x = a$ において右側極限と左側極限が異なる値でも, それぞれが確定している場合には $x = a$ において発散するとはいわない.

例. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ である. 実際, 関数を $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) とかくことにすれば

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2} = 0.5 \\ f(10) &= 10^{-1} = 0.1 \\ f(10^2) &= 10^{-2} = 0.01 \\ f(10^3) &= 10^{-3} = 0.001 \\ &\vdots \\ f(10^{99}) &= 10^{-99} = \underbrace{0.00 \cdots 01}_{100 \text{ 桁}}. \end{aligned}$$

という様に次々に大きい値を代入していけばいくらでも小さな値を得られる. この議論は際限なく続けることができる. しかし実際には目標の小さな値を先に与えて, そこに $f(x)$ が到達する様にできる. 例えば $0 < s \ll 1$ という^a小さな値よりも $f(x)$ の値を小さくとりたい場合は

$$a = \frac{2}{s} \gg 1$$

を代入すると^b

$$f(a) = \frac{1}{\frac{2}{s}} = \frac{s}{2} < s$$

とできる^c. この様に目標の値をどの様に与えても $f(x)$ をその値よりも小さくできるということが 0 に限りなく近づくということである. 以上により $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ であることがわかった.

^a $0 < x \ll a$ の記号は x は a より十分小さいという意味である.

^b $x \gg a$ の記号は x は a より十分大きいという意味である.

^c自分以外の誰かに $s > 0$ を与えてもらうときは途轍もなく小さな値 s を提示されるかもしれない. しかし我々はどんな値が来てもいい様に前もって $a = s/2$ を準備できる. この様に準備できるということが収束するということである.

例. 上の例と同じ様な考え方で $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ である.

例. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ を求めるには $x = -t$ と置き換えて

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(-t)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} = 0$$

となる.

例題. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x - 3)$ を求めよ.

解答. この場合は単純に $x = 2$ を代入するのと同じ操作で極限值が得られる. 実際に

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x - 3) &= 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 \\ &= 4 - 4 - 3 \\ &= -3.\end{aligned}$$

例題. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 5x}{x}$ を求めよ.

解答. この場合は分母に 0 を代入してはいけないので, 単純に $x = 0$ を代入するだけでは極限值は求められない. そこでまず関数を次の様に変形する.

$$\frac{2x^3 + 5x}{x} = 2x^2 + 5.$$

こうすると

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 5x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 5) \\ &= 0 + 5 \quad (x = 0 \text{ を代入してよい}) \\ &= 5.\end{aligned}$$

例題. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (\sqrt{2} - x)^2}{x}$ を求めよ.

解答. この場合も分母に 0 を代入できない. 先ほどの例題よりは少し式変形が複雑になる.

$$\begin{aligned}\frac{2 - (\sqrt{2} - x)^2}{x} &= \frac{2 - (2 - 2\sqrt{2}x + x^2)}{x} \\ &= \frac{2\sqrt{2}x - x^2}{x} \\ &= 2\sqrt{2} - x\end{aligned}$$

となる. こうすると

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (\sqrt{2} - x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (2\sqrt{2} - x) \\ &= 2\sqrt{2} - 0 \quad (x = 0 \text{ を代入してよい}) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

例題. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ を求めよ.

解答. これまでの例題より少し難しい. $x \rightarrow \infty$ のとき $\sqrt{x+1}$ と $\sqrt{x}$ は ∞ に向かうので $\infty - \infty = 0$ の様に思える. しかし ∞ は数ではないので数の四則演算の規則を当てはめることをしてはいけない. そこで ∞ がそのままの形で出てこない様に式変形をして工夫をする.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad (1 \text{ を掛けたのと同じ変わらない}) \\ &= \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

こうして極限は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ここで最後の分数の極限は $\frac{1}{x}$ の極限と同様の考えを当てはめる.

例題. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x)$ を求めよ.

解答. この例題も少し難しい. $x \rightarrow \infty$ のとき x^2 と $5x$ は ∞ に向かうので $\infty - \infty$ の形が出てくる. いま $x \rightarrow \infty$ を考えているのだから $x \geq 6$ としてよい. このとき $x - 5 \geq 1$ なので

$$\begin{aligned} x^2 - 5x &= x(x - 5) \\ &\geq x. \end{aligned}$$

したがって $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ なので, x 以上の値をとる $x^2 - 5x$ も ∞ に発散する. すなわち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x) = \infty.$$

この方法には追い出し法 (または, 追い出しの原理) という名前がついている.

発展的内容

定数 $a > 0$ とする. 関数 $f(x) = \frac{ax}{1+x}$ の $x \rightarrow \infty$ の極限を調べてみよう.

$$f(x) = \frac{ax}{1+x} = \frac{a}{\frac{1}{x} + 1}$$

と変形される. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ なので $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ と予想される. それを確かめるには

$$|f(x) - a|$$

が 0 に限りなく近づくことをいえばよい. 実際に上の絶対値を計算すると

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &= \left| \frac{ax}{1+x} - a \right| \\ &= \left| \frac{-a}{1+x} \right| \\ &= \frac{a}{1+x} \end{aligned}$$

となる. 小さな値 $0 < s \ll 1$ に対して $|f(x) - a| < s$ が成り立つ様にするには

$$\frac{a}{1+x} < s$$

が成り立てばよい.

$$x > \frac{a}{s}$$

に対して所望の不等式が成り立つ. したがって小さな値 s に対して $|f(x) - a| < s$ という要求がされても $x > a/s$ で応えることができる.

第2章 関数の極限 II

はさみうちの原理

定理. 関数 $f(x), g(x)$ について $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ が成り立つとする. 関数 $h(x)$ が

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

をみたすとき

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$$

が成り立つ.

例題. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$ を求めよ.

解答. はさみうちの原理を応用する.

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

なので両辺を $x > 0$ でわると

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$ なので

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

$0 < x < 1$ が十分小さいとき $\cos x \geq 1/2$ である. したがって, 両辺を $x > 0$ で割ると

$$\frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$$

なので追い出し法により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \infty$$

である.

四則演算における極限の法則

定理. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ が成り立つとき以下が成り立つ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA$ (定数 c)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)

$x \rightarrow \infty$ または $x \rightarrow -\infty$ の極限が収束する場合にも, (1) ~ (4) において $x \rightarrow \infty$ または $x \rightarrow -\infty$ とした公式が同様に成り立つ.

次のふたつの例が示す様にこの定理の逆は成り立たない. また発散や振動をして極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ が存在しない場合に (1) ~ (4) の公式を使ってはいけない.

例. 例えば関数

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad g(x) = -\sin x$$

を考えよう. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 1$ となり極限值が確定する. しかし $f(x)$ は 0 と 2 の間を振動するので $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ は存在しない. 同様に $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ も存在しない.

例. 例えば関数

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x$$

を考えよう. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 1$ である. しかし $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ である. また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right)$ という式は成り立たない.

連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことをいう. 連続である関数を連続関数という^a.

^a微分積分学で扱う関数は連続関数ばかりである.

例 (連続でない関数の例). 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

と定義すると $f(0) = 1$ である. 原点 $x = 0$ に右側から近づけると

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1 = f(0).$$

原点 $x = 0$ に左側から近づけると

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1 \neq f(0).$$

近づけ方によって極限值が異なるので極限值が存在しないことになり関数 $f(x)$ は連続ではない.

連続関数 $f(x)$ に別の連続関数 $g(x)$ が代入されていて $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ となっているとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(A)$$

が成り立つ.

関数 $f(x) = x$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で最大値・最小値をとるが $-1 < x < 1$ の範囲では最大値・最小値をとらない. 一般の連続関数について以下の定理が成り立つ.

最大値・最小値を持たない連続関数の例 —

例. 関数

$$f(x) = x \quad (-1 < x < 1)$$

は最大値・最小値を持たない. 1 は最大値の様に思うかもしれないが $f(x)$ は定義域が $-1 < x < 1$ なので 1 に到達できないのである. 同様に -1 にも到達できないので, -1 は最小値ではない.

最大値・最小値を持つ連続関数の例 —

例. 関数

$$f(x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

は最大値・最小値を持つ. $f(x)$ は定義域が $-1 \leq x \leq 1$ なので 1 に到達できるからである. 同様に -1 にも到達できるので -1 は最小値である.

この事実を一般化したものが以下の定理である.

—— 最大値・最小値の原理 ——

定理. 連続関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ の範囲で必ず最大値・最小値をとる.

例. 関数 $f(x) = x^2$ は $-1 \leq x \leq 2$ の範囲で $x = 0$ のとき最小値 $f(0) = 0$ をとる.
 $x = 2$ のとき最大値 $f(2) = 4$ をとる.

例. 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ x^2 - x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

は $x = 0$ において連続でない. すなわち $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で連続でない. また $f(x)$ は最大値をもたない. 一方で $x = 1/2$ において最小値 $f(1/2) = -1/2$ をとる. この様に不連続な関数が最小値を持つこともあることに注意.

—— 中間値の定理 ——

定理. $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ の範囲で定義された連続関数であるとする. $f(a) < A < f(b)$ を満たす定数 A に対して $a \leq c \leq b$ が存在して

$$f(c) = A$$

が成り立つ. これは $f(b) < A < f(a)$ の場合も同様である.

—— 基本的な公式 ——

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

上の式で与えられる $e = 2.71828\dots$ をネイピア数という. (自然対数の底ともいう.)

基本的な公式から以下の公式が得られる.

極限の公式

定理.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

証明.

(1) は

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

(2) は

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

(3) は $t = 1/x$ とおくと $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow \pm\infty$ なので

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

(4) は対数関数の連続性により

$$\lim \log = \log \lim$$

としてよいので

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \log(1+x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log e = 1.$$

(5) は $e^x - 1 = t$ とおくと $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ である. $t+1 = e^x$ なので $\log(t+1) = x$ となり

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\log(1+t)} = \frac{1}{\frac{\log(1+t)}{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1.$$

□

数列

関数 $f(x)$ に自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ を代入して

$$a_n = f(n)$$

と表される $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列という. a_n を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項という.

例. 数列 $a_n = \frac{1}{n}$ は一般項が

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

で表される. 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を使って表せば $a_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) である.

例. 数列 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は一般項が

$$\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \dots$$

で表される. 関数 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ を使って表せば $a_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) である.

数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ も関数の極限と同じ様に考える.

四則演算における極限の法則 (数列)

定理. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ が成り立つとき以下が成り立つ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = cA$ (定数 c)
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)

例.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

例.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

例.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 9}{n^3 + 2n^2 + n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \quad (\text{分母と分子を } n^3 \text{ で割った}) \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

中間値の定理は連続関数に対して成り立つ定理である. 連続ということが重要である. 例えば離散的な値 $n = 1, 2, \dots$ に対して定義される数列

$$a_n = n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

について $1 \leq n \leq 2$ の範囲で考えると $A = 3/2$ に対して

$$a_1 < A < a_2$$

であるが $a_k = A$ となる自然数 k は存在しない.

第3章 微分法

関数 $f(x)$ のグラフにおいて x - y 平面上の 2 点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

である. $x = a$ でグラフに接線が引けるときの b を a に限りなく近づける, すなわち極限操作 $b \rightarrow a$ を行くと

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

は $x = a$ における接線の傾きの値に近づく.

微分係数

関数 $y = f(x)$ について極限值

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

が有限の値に確定するとき, $f(x)$ は微分可能であるという. このとき, $A = f'(a)$ とかき $f(x)$ の $x = a$ における微分係数という.

微分係数の計算により求められる関数のことを $f(x)$ の導関数といい $f'(x)$ とかく. 導関数を求める計算を “関数 $f(x)$ を微分する” といったりする. $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を

$$\frac{dy}{dx}$$

とか

$$\frac{df}{dx}(x)$$

等とかくことがある.

右微分係数, 左微分係数

関数 $f(x)$ に対して

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を $f(x)$ の $x = a$ における右微分係数という. また

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を $f(x)$ の $x = a$ における左微分係数という. $\lim_{h \rightarrow +0}$ は $h > 0$ の条件下で $h \rightarrow 0$ に近づけるという意味である. 同様に $\lim_{h \rightarrow -0}$ は $h < 0$ の条件下で $h \rightarrow 0$ に近づけるという意味である. $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるための必要十分条件は

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

が成り立つことである.

接線の方程式

関数 $y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ である. 一方で接線は x - y 平面上の点 $(a, f(a))$ と点 (x, y) を通る直線である. したがって接線の傾きは

$$\frac{y - f(a)}{x - a}$$

で与えられる. 直線だからこの傾きは $f'(a)$ と等しいので

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

を得る. 式を整頓すると接線の方程式

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

を得る.

定理. $x = a$ において微分可能な関数 $f(x)$ は $x = a$ において連続である.

証明. $x = a$ で微分可能であるとする. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

したがって $x = a$ において連続である.

□

例. 上の定理の逆は成り立たない. $f(x) = |x|$ は $x = 0$ において微分可能でない. 実際に,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = 1, \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = -1.\end{aligned}$$

となり $h \rightarrow 0$ の近づけ方に依って極限值が異なるので $h \rightarrow 0$ の極限值は存在しない.

基本的な微分の法則

定理. $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能なとき以下のそれぞれも微分可能で公式が成り立つ.

- (1) $(cf(x))' = cf'(x)$ (定数 c)
- (2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- (3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)
- (4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ ($g(x) \neq 0$) (商の微分法)

証明.

(1)

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

ここで, $g(x)$ の連続性により $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ が成り立つことを用いた.

(4) 簡単のために $g(x+h) \neq 0$ とする.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{g(x+h)g(x)} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

□

基本的な関数の微分の公式

定理.

- (1) $c' = 0$ (定数 c)
- (2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (自然数 $n \geq 1$)
- (3) $(\sin x)' = \cos x$
- (4) $(\cos x)' = -\sin x$
- (5) $(e^x)' = e^x$
- (6) $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$

証明.

(1) 定数は定数関数 $f(x) = c$ と考える.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

(2) は複雑なので $n = 2$ の場合だけ示そう^{*1}.

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x.$$

^{*1}一般の場合は式が難しいから飛ばしても良い. 以下の様に示せる. 二項定理より

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{l+m=n} \frac{n!}{l!m!} x^l h^m - x^n \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{n!}{n!0!} x^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} x^{n-1} h + \sum_{\substack{l+m=n \\ 2 \leq m \leq n}} \frac{n!}{l!m!} x^l h^m - x^n \right) \\ &= nx^{n-1} + \sum_{\substack{l+m=n \\ 2 \leq m \leq n}} \frac{n!}{l!m!} x^l h^{m-1} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} nx^{n-1}. \end{aligned}$$

ここで $0! = 1$ である.

(3) は加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x.\end{aligned}$$

(4) は (3) と同じ様にできる.

(5) は

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^x.$$

(6) は

$$\frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \frac{1}{h} \log \left| 1 + \frac{h}{x} \right|$$

なので

$$t = \frac{h}{x}$$

とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ なので

$$0 < |t| < \frac{1}{2}$$

としてよいので

$$1 + t > 0$$

としてよくて

$$\frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

□

簡単のために $0 < x < \pi/4$ で考える. このとき $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ であるが $0 < x < \pi/4$ の範囲で $\cos x$ は減少関数で $\sin x$ は増加関数である. だから $(\cos x)'$ には $-$ 符号がつき, $(\sin x)'$ には $+$ 符号がつく. $\sin x$ と $\cos x$ は微分するともう一方の関数になることは覚えていても $(-)$ の符号がどちらにつくか忘れることがある. しかし上の事実を思い出せば符号を間違えないで済む.

例. $y = f(x) = \tan x$ の微分を求めてみよう.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

なので商の微分法を用いると

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ に別の関数 $g(x)$ を代入した関数のことを合成関数という.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

とかく.

合成関数の微分

定理. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能なとき合成関数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

も微分可能で

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

となる^a.

^a正確には $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$ とかく.

証明.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

を計算していく. そこで

$$\begin{aligned} y &= g(x), \\ k &= g(x+h) - g(x) \end{aligned}$$

とおく. このとき

$$1 = \frac{g(x+h) - g(x)}{k}$$

なので

$$\begin{aligned}
 (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \cdot 1 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{k} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(g(x)) \cdot g'(x).
 \end{aligned}$$

□

例. 関数

$$f(x) = \sin x$$

に関数

$$g(x) = 2x + 1$$

を合成した合成関数は

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin(2x + 1)$$

である. 微分をすると

$$(f(g(x)))' = (\cos(2x + 1)) \cdot (2x + 1)' = 2 \cos(2x + 1)$$

となる.

例. 関数

$$f(x) = e^x$$

に関数

$$g(x) = x^2$$

を合成した合成関数は

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2}$$

である. 微分をすると

$$(f(g(x)))' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}$$

となる.

対数微分法

例. 実数 α に対する関数

$$f(x) = x^\alpha \quad (x > 0)$$

の微分を求めてみよう. α がいつも自然数とは限らないから公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ をそのまま当てはめることができない. そこで $f(x)$ の対数をとる.

$$\log(f(x)) = \log(x^\alpha) = \alpha \log x.$$

この両辺を微分すると左辺は

$$\log(f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x^\alpha} \cdot f'(x).$$

右辺は

$$(\alpha \log x)' = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

を得る. これらは等しくなければならないので

$$\frac{1}{x^\alpha} \cdot f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

両辺 x^α 倍して

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

例. 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の微分を求めてみよう. $f(x) = x^{1/2}$ なので $\alpha = 1/2$ として前の計算に当てはめると

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

増減表

極値

関数 $y = f(x)$ の導関数が $f'(a) = 0$ をみたし $x = a$ において $f'(x)$ の符号が $+$ から $-$ に転ずるとき $f(x)$ は $x = a$ において極大であるという. $f(a)$ を極大値という. また $x = a$ において $f'(x)$ の符号が $-$ から $+$ に転ずるとき $f(x)$ は $x = a$ において極小であるという. $f(a)$ を極小値という.

増減表と極大・極小の求め方

関数 $y = f(x)$ の極大値・極小値を求めるには下の増減表を作ればよい^a.

x	$\cdots$	a_1	$\cdots$	a_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$ or $-$	0	$+$ or $-$	0	$+$ or $-$
$f(x)$	$\nearrow$ or $\searrow$	$f(a_1)$	$\nearrow$ or $\searrow$	$f(a_2)$	$\nearrow$ or $\searrow$

$f'(a) = 0$ なる点 $x = a$ において

- グラフが減少から増加に転ずれば $x = a$ で極小である
- グラフが増加から減少に転ずれば $x = a$ で極大である

^aここで紹介する仕方で増減表を作ることが出来る根拠は後に紹介する平均値の定理を基にした議論において示される. 直観的には微分係数は接線の傾きを表しているのだから接線の傾きが正なら増加, 負なら減少しているということを理解できる.

例. 関数 $y = f(x) = x^3 + 2x^2$ とする.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 3x \left(x + \frac{4}{3} \right)$$

である. $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y = 3a \left(a + \frac{4}{3} \right) (x - a) + a^3 + 2a^2$$

である. $x = -4/3, 0$ のときに $f'(x) = 0$ となるので増減表は以下のとおりである.

x	$\cdots$	$-4/3$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$32/27$	$\searrow$	0	$\nearrow$

例. 関数 $y = f(x) = x^3 e^x$ とする.

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 (x + 3) e^x$$

である. $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y = a^2 (a + 3) e^a (x - a) + a^3 e^a$$

である. $x = -3, 0$ のときに $f'(x) = 0$ となるので増減表は以下のとおりである.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-27e^{-3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

発展的内容

微分係数の発散

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \infty) \end{cases}$$

と定義する. グラフを描くと理解できるが, この関数は $x = 0$ において値が跳躍している. この場合の右微分係数, 左微分係数について調べてみよう.

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1-1}{h} = 0$$

となる. 一方

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{0-1}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{1}{-h} = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{1}{k} = \infty$$

となり左微分係数が発散する. このことは $x = 0$ において関数の値が不連続に跳躍するという事実に合致している. つまり $x < 0$ の範囲から進んで $x = 0$ において突然, 値が変化するので謂わば傾きが無限大になってしまうということを表している.

もうひとつ微分係数が発散する例を紹介しよう.

例. 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ x^2 - x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

について考える. この関数も $x = 0$ において値が不連続に跳躍するという特徴を持っている. この特徴が左微分係数に現れることを確かめてみよう.

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 1) = -1$$

となる. この値は有限の値に確定しているがグラフを描いて $x \geq 0$ の範囲で接線を引いてみれば右微分係数が $f'_+(0) = -1$ となることを納得できるはずである. $f(x)$ は $x \geq 0$ においては連続であり跳躍がないのである. 一方

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{1 - h^2}{h} = -\infty$$

となり $x = 0$ において左微分係数が発散する. ここで, 最後のところでは $h \rightarrow -0$ のとき $h^2 \leq 1/2$ としてよいので $1 - h^2 \geq 1/2$ となるから

$$\frac{1 - h^2}{h} \geq \frac{1}{2h} \xrightarrow{h \rightarrow -0} -\infty$$

であることを用いた. したがって左微分係数が $x = 0$ において $-\infty$ に発散する. これは $x = 0$ において関数の値が急に下に向かって飛んでいることを表している.

第4章 逆関数と微分

逆関数

関数 $y = f(x)$ を x について解き $x = g(y)$ と一意的に表示できるとき, もういちど変数の文字を x に戻した関数 $y = g(x)$ を $f(x)$ の逆関数といい $f^{-1}(x) = g(x)$ とかく.

逆関数 $f^{-1}(y)$ は $y = f(x)$ を x に戻す関数である. すなわち関係式

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

が成り立つ. また $f(x)$ は $x = f^{-1}(y)$ の逆関数だから関係式

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

が成り立つ.

例. 関数

$$y = f(x) = x^2$$

を考える.

$$x = \pm\sqrt{y}$$

と解くことができるが関数が一意に定まらない. $x \geq 0$ に限定して考えれば

$$x = \sqrt{y}$$

となる. したがって定義域を $x \geq 0$ に制限した関数

$$f(x) = x^2$$

の逆関数は

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

である.

逆関数の微分

定理. 関数 $f(x)$ は微分可能であるとする. さらに $y = f^{-1}(x)$ は微分可能であるとする^a. このとき $y = f^{-1}(x)$ の導関数 dy/dx について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

が成り立つ.

^a f に適当な条件を課すと f^{-1} が定義され連続関数となることがわかる. 元の関数が微分可能で逆関数が連続であることから逆関数が微分可能であることも導かれるがここでは細かい条件にはこだわらず, 逆関数が定義出来て微分可能であるという前提のもと導関数の公式だけを導く. この資料では初等関数とその逆関数ばかり扱うからそれで十分である.

証明.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h}$$

を計算する.

$$\begin{aligned} z &= f^{-1}(x+h), \\ y &= f^{-1}(x) \end{aligned}$$

とおくと逆関数の関係より

$$\begin{aligned} x+h &= f(z), \\ x &= f(y) \end{aligned}$$

したがって $h \rightarrow 0$ のとき $z \rightarrow y$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} &= \lim_{z \rightarrow y} \frac{z - y}{f(z) - f(y)} \\ &= \lim_{z \rightarrow y} \frac{1}{\frac{f(z) - f(y)}{z - y}} \\ &= \frac{1}{f'(y)}. \end{aligned}$$

□

y を x で微分するという意味の記号

$$\frac{dy}{dx}$$

を分数としてみれば逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

は

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

と同じ形になっている．ここで b/a の分母と分子に $1/b$ を掛けると上の式に変形できることに注意．

逆三角関数

ここでは三角関数の逆関数を紹介しよう．三角関数のグラフは周期的に同じ値が現れる．したがって例えば $y = 1$ とすれば

$$1 = \cos x$$

に対応する値 $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ は無数に存在するので逆関数を定義できない．そこで同じ値が繰り返し現れない様に三角関数の定義域を以下の様に制限して考える．

$$\begin{cases} y = \sin x & (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2) \\ y = \cos x & (0 \leq x \leq \pi) \\ y = \tan x & (-\pi/2 < x < \pi/2) \end{cases}$$

上の様に定義域を制限した三角関数に対して逆関数が定義でき、それぞれ

$$\begin{cases} y = \sin^{-1} x & (-1 \leq x \leq 1) \\ y = \cos^{-1} x & (-1 \leq x \leq 1) \\ y = \tan^{-1} x & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

となる．表にまとめると以下の様になる．

逆三角関数の定義域・値域

逆三角関数	定義域	値域
$y = \sin^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$

例題. $\sin^{-1}(-1)$ の値を求めよ.

解答. $x = \sin^{-1}(-1)$ とおく. 両辺の $\sin$ をとると $\sin x = -1$ を得る. x は $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ の範囲である. したがって $x = -\pi/2$.

定理. 以下の逆三角関数の微分公式が成り立つ.

$$(1) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(2) (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(3) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

証明. (1) $y = f(x) = \sin^{-1} x$ を逆関数の微分法で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

ここで $x = \sin y$ と $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ であることを用いた. また $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ なので $\cos y \geq 0$ であるから根号の符号をプラスにとっている.

(2) $y = f(x) = \cos^{-1} x$ を逆関数の微分法で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{-\sin y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

ここで $x = \cos y$ と $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ であることを用いた. また $0 \leq y \leq \pi$ なので $\sin y \geq 0$ であるから根号の符号をプラスにとっている.

(3) $y = f(x) = \tan^{-1} x$ を逆関数の微分法で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

ここで $x = \tan y$ と $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$ であることを用いた. □

例. 逆三角関数で定まる合成関数の微分について例を紹介する.

$$y = \sin^{-1}(2x) \quad (-1/2 \leq x \leq 1/2)$$

は $f(x) = \sin^{-1} x$, $g(x) = 2x$ として

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

と表される. y の微分は

$$\begin{aligned} y' &= (f' \circ g)(x)g'(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \end{aligned}$$

となる.

微分公式

基本的な微分の公式

$$(1) \quad c' = 0 \quad (\text{定数 } c)$$

$$(2) \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (\text{自然数 } n \geq 1)$$

$$(3) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(4) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(5) \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(6) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(7) \quad (\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(8) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \text{ 実数 } \alpha)$$

$$(9) \quad (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(10) \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(11) \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

第5章 平均値の定理とテイラーの定理

—— ロルの定理 ——

定理. 関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であり $a < x < b$ で微分可能であるとする. さらに, $f(a) = f(b)$ が成り立つとする. このとき, $f'(c) = 0$ をみたす $a < c < b$ が存在する.

ロルの定理の証明には専門的な議論を必要とするので, ここでは行わないことにする^a. 直観的には, $f(x)$ が連続なので $y = f(x)$ で表される曲線は繋がっているのであるが $f(a) = f(b)$ なので関数の値は始め ($x = a$) と終わり ($x = b$) で一致している. 一般に $a < x < b$ の範囲においては値が $f(a)$ に一致するとは限らないから, どこかで必ず $f(a)$ より増えるか減るのであるが, 再び $f(b)$ に一致するには, どこかで必ず折り返して戻ってくる形になる. その際に微分係数が 0 となる.

^a解析学の専門的な授業で扱われる.

—— 平均値の定理 ——

定理. 関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であり $a < x < b$ で微分可能であるとする. このとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

をみたす $a < c < b$ が存在する

証明. $y = f(x)$ で表される曲線上の 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ直線

$$F(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$$

とおくと, $F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能である. また $F(a) = F(b) = 0$ をみたすので, ロルの定理を適用すると

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

をみたす $a < c < b$ が存在する.

□

実数の取り得る値の範囲を表す不等号 $<, >$ と $\leq, \geq$ は異なる意味をもつ。最初のうちは、これらを使い分けて記述している数学の文章を読みにくいと感じるかもしれない。しかし、実はこの資料で扱う関数については実数の動く範囲について細かいことを気にする必要はほとんどない。なぜなら実際に定理を用いる場面においては実数全体で微分可能な関数を扱うことが多いからである。しかし数学ではなるべく適用範囲を広げた形で定理を書きたいのでこの様を書くことが多い。

これは $x = a$ から $x = b$ への変化に伴う関数 $f(x)$ の変化の割合を表す平均変化率

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

がある点 c における接線の傾き $f'(c)$ と等しいことをいっている。

1 次近似

平均値の定理の式を変形すると

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

を得る。この式において b を x に取り替えて関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$$

と定義すると $g(x)$ は $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ を満たすので $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る直線として $f(x)$ を近似する 1 次関数である。

例題. 関数 $f(x) = x^2$ について定義域 $1 \leq x \leq 3$ で平均値の定理における $1 < c < 3$ の値を具体的に求めよ.

解答.

$$f'(x) = 2x$$

なので

$$f'(c) = 2c$$

である.

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

である. これらが等しいので

$$2c = 4$$

を解くと

$$c = 2$$

を得る.

例題. 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について定義域 $0 \leq x \leq 2$ で平均値の定理における $0 < c < 2$ の値を具体的に求めよ.

解答.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

なので

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

である.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である. これらが等しいので

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を解くと

$$c = \frac{1}{2}$$

を得る.

テイラーの定理とは平均値の定理を高次の次数に拡張したものである.

高階微分

$f(x)$ の微分 $f'(x)$ をさらに微分したものを2階微分といい $f^{(2)}(x)$ とかく. さらに高階の微分も順番に微分を繰り返して

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

と得ることができる^a.

^a適当な階数だけ微分可能であれば.

テイラーの定理

定理. 関数 $f(x)$ の高階微分 $f^{(n-1)}(x)$ ($n \geq 1$) は $a \leq x \leq b$ で連続であり $f^{(n-1)}(x)$ は $a < x < b$ で微分可能であるとする. このとき

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n \end{aligned}$$

をみたす $a < c < b$ が存在する. ここで

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

とおいた. R_n を剰余項という^a.

^aとくに R_n をラグランジュの剰余という. 剰余項はいくつか知られているが R_n が標準的であろう.

和の記号 $\sum$ が苦手な人は和の記号を使わずに理解すれば十分である. ただし証明では和の記号を使う.

証明. 定数 K を

$$K = \frac{1}{(b-a)^n} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right)$$

とおく. 関数 $F(x)$ を以下の様に定義する.

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - K(b-x)^n.$$

$F(x)$ は $a \leq x \leq b$ における連続関数である. このとき K の定義の仕方から

$$F(a) = F(b) = 0.$$

また $F(x)$ は $a < x < b$ において微分可能であるからロルの定理により $a < c < b$ が存在して

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = 0$$

とできる.

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + nK(b-x)^{n-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{l=0}^{n-2} \frac{f^{(l+1)}(x)}{l!} (b-x)^l + nK(b-x)^{n-1} \quad (k-1=l \text{ と置いた}) \\ &= - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + nK(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

なので

$$- \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1} + nK(b-c)^{n-1} = 0$$

が成り立つ. これにより

$$K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

となる. 以上により

$$\frac{1}{(b-a)^n} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

なのでこの式を整頓して求める式を得る. □

2 次近似

$n = 2$ のときのテイラーの定理の式は

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} (b-a)^2$$

である. この式において b を x に取り替えて関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} (x-a)^2$$

と定義すると $g(x)$ は $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ を満たすので $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る曲線として $f(x)$ を近似する 2 次関数である. $f(x)$ の定める曲線に対して平均値の定理のときよりも近似の精度が上がっている.

$n = 2$ における式

$n = 2$ の場合のテイラーの定理の式は

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(b-a)^2$$

である.

例題. 関数 $f(x) = x^3$ について定義域 $0 \leq x \leq 2$ で $n = 2$ の場合のテイラーの定理における $0 < c < 2$ の値を具体的に求めよ.

解答. $f^{(1)}(x) = 3x^2$, $f^{(2)}(x) = 6x$ である. $a = 0$, $b = 2$ として上の式に代入すると

$$8 = \frac{6c}{2} \cdot 4$$

を得る. この式を整頓すると

$$c = \frac{2}{3}.$$

例題. 関数 $f(x) = \cos x$ について定義域 $0 \leq x \leq \pi/4$ で $n = 2$ の場合のテイラーの定理における $0 < c < \pi/4$ の値を具体的に求めよ.

解答. $f^{(1)}(x) = -\sin x$, $f^{(2)}(x) = -\cos x$ である. $a = 0$, $b = \pi/4$ として上の式に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\cos c}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

を得る. この式を整頓すると

$$\cos c = \frac{16}{\pi^2} (2 - \sqrt{2}) \simeq 0.9496 \dots < 1.$$

したがって

$$c = \cos^{-1} \left(\frac{16}{\pi^2} (2 - \sqrt{2}) \right) \simeq 0.3187 \dots < \frac{\pi}{4}.$$

ここでは参考のために関数電卓を用いて計算した値をかいた.

n 次近似

$n \geq 1$ に対するテイラーの定理の式は

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n$$

である. この式において b を x に取り替えて関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

と定義すると $g(x)$ は $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ を満たすので $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る曲線として $f(x)$ を近似する n 次関数である. $f(x)$ の定める曲線に対してより高い精度の近似となる.

発展的内容

既に増減表の書き方を説明しているが平均値の定理から関数の単調増加・減少が説明できる. 関数 $f(x)$ は

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (x_1 > x_2)$$

をみたすとき狭義単調増加関数であるという. 同様に

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1 > x_2)$$

をみたすとき狭義単調減少関数であるという.

定理. $a \leq x \leq b$ で定義された関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ の範囲で微分可能とする. このとき, 次のことが成り立つ.

- (1) $a \leq x \leq b$ に対して $f'(x) > 0$ のとき $f(x)$ は狭義単調増加関数である.
- (2) $a \leq x \leq b$ に対して $f'(x) < 0$ のとき $f(x)$ は狭義単調減少関数である.
- (3) $a \leq x \leq b$ に対して $f'(x) = 0$ のとき $f(x)$ は定数関数である.

証明. $a \leq x \leq b$ の範囲内で $x_1 > x_2$ を任意に選んで固定する. $a = x_2, b = x_1$ として $f(x)$ に平均値の定理を適用すると

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)$$

をみたす $x_2 < c < x_1$ が存在する.

(1) $a \leq x \leq b$ に対して $f'(x) > 0$ のときは

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c) > 0$$

となるので $f(x_1) - f(x_2) > 0$ が成り立つ. すなわち $f(x)$ は狭義単調増加関数である.

(2) も同様である.

(3) $a \leq x \leq b$ に対して $f'(x) = 0$ のときは

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c) = 0$$

となるので $f(x_1) = f(x_2)$ が成り立つ. このことは $f(x)$ が一定の値をとる関数, すなわち定数関数であることを意味する. $\square$

逆三角関数の和

逆三角関数の微分公式を用いると

$$(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

を得る. このことから

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = C \text{ (定数)}$$

が成り立つ. $x = 1$ を代入すると $\sin^{-1}(1) = \pi/2$, $\cos^{-1}(1) = 0$ なので $C = \pi/2$. すなわち

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

が成り立つ.

逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の端点における微分係数の発散

$y = f(x) = \sin^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の $x = 1$ における微分係数を調べてみよう. そのために次の極限について考えることになる.

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{f(1-k) - f(1)}{-k} = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{\sin^{-1}(1-k) - \frac{\pi}{2}}{-k}.$$

まず

$$g(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + x - 1$$

と定義すると $g(0) = 0$ である. また

$$g'(x) = -\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \frac{1}{8} + 1$$

で $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ だから $x > 0$ が十分小さいとき

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \leq \frac{3}{2}$$

なので $g'(x) > 0$ である. したがって $g(x) > 0$ ($x > 0$). 以上より

$$1 - k < \cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2}\right)$$

である. $f(x) = \sin^{-1} x$ ($-1 < x < 1$) は単調増加関数なので

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(1-k) &\leq \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2}, \\ \frac{\sin^{-1}(1-k) - \frac{\pi}{2}}{-k} &\geq \frac{1}{2\sqrt{k}} \xrightarrow{k \rightarrow +0} \infty. \end{aligned}$$

以上により $x = 1$ において $f(x) = \sin^{-1} x$ の微分係数は発散する. ここで

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$$

であることに注意.

次のコーシーの平均値の定理は通常の平均値の定理を特別な場合として含む. 通常の平均値の定理はラグランジュの平均値定理と呼ばれることがある.

コーシーの平均値の定理

定理. 関数 $f(x)$, $g(x)$ は $a \leq x \leq b$ において連続で $a < x < b$ において微分可能であるとする. このとき $g'(x) \neq 0$ ($a < x < b$) をみたすならば, 適当な $a < c < b$ に対して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成り立つ.

証明. 関数

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \end{pmatrix}$$

と定義する. $F(x)$ は連続で $a < x < b$ で微分可能であり $F(a) = F(b) = 0$ である. $F(x)$ はロルの定理^{*1}の仮定を満たしているので $a < c < b$ が存在して $F'(c) = 0$ を満たす.

$$F'(x) = \det \begin{pmatrix} f'(x) & g'(x) & 0 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

となる. □

次の定理は $0/0$ の不定形の極限を計算する方法として知られる.

ロピタルの定理

定理. $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能で $g'(x) \neq 0$ ($x \neq a$) であるとする. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

証明. 先に

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$$

^{*1}ロルの定理を認めることにしている.

の場合に $x \rightarrow a + 0$ の極限について示していく. $x \rightarrow a - 0$ とする場合も同様である. x_0 が $a < x_0$ を満たすと仮定して $a \leq x \leq x_0$ において平均値の定理 (コーシー) を適用すると

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0) - f(a)}{g(x_0) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c = c_{x_0}$ が $a < c < x_0$ の範囲に存在する. ここで c は x_0 に依存することに注意しよう. さらにこのとき $\theta = \theta_{x_0}$ が $0 < \theta < 1$ の範囲に存在して

$$c = (1 - \theta)a + \theta x_0 = a + \theta(x_0 - a)$$

とかける. したがって

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x_0) - f(a)}{g(x_0) - g(a)} \\ &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \\ &= \frac{f'(a + \theta(x_0 - a))}{g'(a + \theta(x_0 - a))} \\ &= \frac{f'(y)}{g'(y)}. \end{aligned}$$

ここで $y = a + \theta(x - a)$ とおいた. $0 < \theta < 1$ に対し一様に $|y - a| \leq |x - a|$ なので $x \rightarrow a + 0$ のとき $y \rightarrow a + 0$ である. よって

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow a+0} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

最後に変数の表記を x に戻して

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$x \rightarrow a - 0$ の場合も同様に考えることができ

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が得られるので定理が示された. □

例. ロピタルの定理を用いて $0/0$ の不定形の極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e + x^2) - \cos x}{x^2}$$

を計算してみよう. $f(x) = \log(e + x^2) - \cos x$, $g(x) = x^2$ とおくと $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ をみたしている. また $g'(x) \neq 0$ ($x \neq 0$) である. したがってロピタルの定理が適用できる.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e + x^2) - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{e+x^2} + \sin x}{2x} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{e+2}{2e}.$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

を用いた.

実は今後, 勉強が進んで高度な解析学^aを学ぶ様になってもロピタルの定理が本質的に役に立つ場面は意外と少ない (ほとんどないと言っても過言ではない). また工夫するとロピタルの定理を使わずに計算できることがある. 上の例では, ロピタルの定理を使わずに次の様に式変形して計算することができる.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e + x^2) - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e + x^2) - \log e + \log e - \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(e + x^2) - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(e + x^2) - 1}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x)x^2} \right) \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{e+2}{2e}. \end{aligned}$$

ここで, 対数関数に対する微分係数の定義により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e + x^2) - 1}{x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(e + h) - 1}{h} = \frac{1}{e}$$

であることを用いた.

^a複雑な計算問題が載った問題集のことではなく, 積分論や関数解析またはその周辺分野のことを指す.

第6章 テイラー展開の計算

テイラーの定理の続き

— 前回の復習 —

前章で以下の式を導いた.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

ここで

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

を剰余項という.

上のテイラーの定理の式で $a=0, b=x$ とおくと $0 < c < x$ が存在して

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

とできる. いま x は定数と同じ扱いなので剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \quad (n \geq 0)$$

という数列の形をしている. もし $f(x)$ が何回でも微分可能で剰余項が $n \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束するとき, すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = 0$$

をみたすとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - R_n$$

とかきかえると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - R_n) = f(x)$$

なので $f(x)$ は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

という無限級数に展開することができる. これを $f(x)$ の $x=0$ の周りにおけるテイラー展開という.

テイラー展開

$f(x)$ の $x=0$ の周りにおけるテイラー展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

重要な関数のテイラー展開

定理. 以下の (1) ~ (4) の関数は剰余項が 0 に収束し次の様にテイラー展開可能である.

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(4) \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (-1 < x \leq 1)$$

証明. ここでは剰余項が $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束することを前提に証明を進めることにする.

(1) $f(x) = e^x$ は $f^{(k)}(x) = e^x$ である. したがって $f^{(k)}(0) = 1$ なので

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(2) $f(x) = \sin x$ とすると

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x,$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x,$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x,$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

なので

$$\begin{aligned}f^{(1)}(0) &= 1, \\f^{(2)}(0) &= 0, \\f^{(3)}(0) &= -1, \\f^{(4)}(0) &= 0, \\f^{(5)}(0) &= 1\end{aligned}$$

となり奇数階の微分係数の項だけ ± 1 が交互に現れる. したがって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

(3) $f(x) = \cos x$ とすると

$$\begin{aligned}f^{(1)}(x) &= f'(x) = -\sin x, \\f^{(2)}(x) &= -\cos x, \\f^{(3)}(x) &= \sin x, \\f^{(4)}(x) &= \cos x, \\f^{(5)}(x) &= -\sin x\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}f^{(1)}(0) &= 0, \\f^{(2)}(0) &= -1, \\f^{(3)}(0) &= 0, \\f^{(4)}(0) &= 1, \\f^{(5)}(0) &= 0\end{aligned}$$

となり偶数階の微分係数の項だけ ± 1 が交互に現れる. したがって

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

(4) $f(x) = \log(1+x)$ とする. ただし定義域は $-1 < x \leq 1$ である.

$$\begin{aligned}f^{(1)}(x) &= f'(x) = \frac{1}{1+x}, \\f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\f^{(3)}(x) &= \frac{2!}{(1+x)^3}, \\f^{(4)}(x) &= -\frac{3!}{(1+x)^4}, \\f^{(5)}(x) &= \frac{4!}{(1+x)^5}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} f^{(1)}(0) &= 1, \\ f^{(2)}(0) &= -1, \\ f^{(3)}(0) &= 2!, \\ f^{(4)}(0) &= -3!, \\ f^{(5)}(0) &= 4! \end{aligned}$$

となり $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ ($k \geq 1$) となる. したがって

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

□

例題. 関数 $f(x) = e^{2x}$ のテイラー展開を求めよ.

解答. $f(x) = e^{2x}$ について $f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ である. したがって $f^{(k)}(0) = 2^k$ なので

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots.$$

またはもっと簡単に

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

に $t = 2x$ を代入して

$$e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots.$$

としても良い.

例題. 関数 $f(x) = \cos(2x)$ のテイラー展開を求めよ.

解答. $f(x) = \cos(2x)$ について

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = -2 \sin(2x),$$

$$f^{(2)}(x) = -2^2 \cos(2x),$$

$$f^{(3)}(x) = 2^3 \sin(2x),$$

$$f^{(4)}(x) = 2^4 \cos(2x),$$

$$f^{(5)}(x) = -2^5 \sin(2x)$$

なので

$$f^{(1)}(0) = 0,$$

$$f^{(2)}(0) = -4,$$

$$f^{(3)}(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = 16,$$

$$f^{(5)}(0) = 0.$$

したがって

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots.$$

この場合も $\cos t$ のテイラー展開に $t = 2x$ を代入しても良い.

応用

例.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

このことを示してみよう. いま $x \rightarrow \infty$ を考えているから $x > 0$ としてよい. このときテイラー展開をすると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \geq 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

なので

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{x^2}{e^x} &\leq \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!}} \\ &\leq \frac{6}{x}. \end{aligned}$$

両辺で $x \rightarrow \infty$ とすると両端の項は0に収束する. はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

である.

例. 自然数 $k \geq 1$ とする.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

このことを示してみよう. テイラー展開をすると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots \geq 1 + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

なので

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{x^k}{e^x} &\leq \frac{x^k}{1 + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x^k} + \frac{1}{k!} + \frac{x}{(k+1)!}} \\ &\leq \frac{(k+1)!}{x}. \end{aligned}$$

両辺で $x \rightarrow \infty$ とすると両端の項は 0 に収束する. はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

である.

$x > 0$ とする. e^x をテイラー展開すると x^n の形の項を正の係数を伴う形で無限個含んでいる. したがって x^k/e^x において分母にある e^x の方が支配的になり $x \rightarrow \infty$ の極限で 0 に近づくのである.

例.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

このことを示してみよう. $x = e^t$ と置き換えると $t = \log x$ である. $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ なので

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

である.

例.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0.$$

このことを示してみよう. $x = e^{-t}$ と置き換えると $t = -\log x$ である. $x \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow \infty$ なので

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{e^t} = 0$$

である.

発展的内容

テイラーの定理における剰余項

$f(x) = e^x$ の剰余項

$f(x) = e^x$ の $x = 0$ の周りにおけるテイラーの定理の剰余項は

$$R_n = \frac{e^c}{n!} x^n \quad (0 < c < x)$$

である. 実は定数 A に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$$

であることが知られている. $n \rightarrow \infty$ の極限をとるとき x は定数扱いできるので $A = x$ とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^c}{n!} x^n = 0$$

となる. すなわち剰余項は 0 に収束するのである.

三角関数や対数関数の場合も同様のことがいえる. 次に少し複雑そうな関数 $f(x) = e^x \cos x$ の剰余項を調べてみよう. その前に以下の公式を紹介しておこう.

ライプニッツの公式

定理. $f(x), g(x)$ は n 回微分可能であるとする. このとき, 公式

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} f^{(n_1)}(x)g^{(n_2)}(x)$$

が成り立つ^a.

$$^a \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} f^{(n_1)}(x)g^{(n_2)}(x) = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \text{ とかくこともある.}$$

証明. n に関する帰納法で示していく. $n = 1$ のときは積の微分公式により成り立つ.
 $n \geq 1$ で成り立つと仮定し

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} f^{(n_1)} g^{(n_2)} \right)' \\
 &= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} (f^{(n_1)} g^{(n_2)})' \\
 &= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} (f^{(n_1+1)} g^{(n_2)} + f^{(n_1)} g^{(n_2+1)}) \\
 &= \sum_{(n_1+1)+n_2=n+1} \frac{n!(n_1+1)}{(n_1+1)!n_2!} f^{(n_1+1)} g^{(n_2)} + \sum_{n_1+(n_2+1)=n+1} \frac{n!(n_2+1)}{n_1!(n_2+1)!} f^{(n_1)} g^{(n_2+1)}.
 \end{aligned}$$

第1項で

$$n_1 + 1 = l_1$$

第2項で

$$n_2 + 1 = l_2$$

と置き換えると

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \sum_{l_1+n_2=n+1} \frac{n!l_1}{l_1!n_2!} f^{(l_1)} g^{(n_2)} + \sum_{n_1+l_2=n+1} \frac{n!l_2}{n_1!l_2!} f^{(n_1)} g^{(l_2)} \\
 &= \sum_{n_1+n_2=n+1} \frac{n!n_1}{n_1!n_2!} f^{(n_1)} g^{(n_2)} + \sum_{n_1+n_2=n+1} \frac{n!n_2}{n_1!n_2!} f^{(n_1)} g^{(n_2)} \\
 &= \sum_{n_1+n_2=n+1} \frac{n!(n_1+n_2)}{n_1!n_2!} f^{(n_1)} g^{(n_2)} \\
 &= \sum_{n_1+n_2=n+1} \frac{(n+1)!}{n_1!n_2!} f^{(n_1)} g^{(n_2)}.
 \end{aligned}$$

□

$f(x) = e^x \cos x$ の剰余項

$f(x) = e^x \cos x$ に対し $x = 0$ の周りにおけるテイラーの定理を適用したとき、剰余項は

$$R_n = \frac{(e^x \cos x)^{(n)}|_{x=c}}{n!} x^n \quad (0 < c < x)$$

である。ライプニッツの公式を適用すると

$$\begin{aligned} 0 \leq |R_n| &= \left| \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} e^c \cdot (\cos x)^{(l)}|_{x=c} \cdot x^n \right| \\ &\leq e^c |x|^n \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} \\ &= e^c |x|^n \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} 1^k 1^l \\ &= e^c \frac{(2|x|)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

である。

以下で定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は無限回微分可能であるがテイラー展開可能でないことが知られている。しかし $f(x)$ は実解析やフーリエ解析において重要な役割をもつ。つまりテイラー展開できない関数だからといって役に立たないわけではない。また複雑な自然現象の記述においては連続性や微分可能性を期待できない関数も現れる。

最後に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$$

を証明しておこう。 A によって決まる定数を

$$N = [|A|] + 1$$

とおく^{*1}。このとき

$$N - 1 \leq |A| < N$$

^{*1}ここでガウス記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。 $x = 0.9$ のときは $[x] = 0$, $x = 1.2$ のときは $[x] = 1$ である。 $x = -1.5$ のときは $[x] = -2$ である。 -1 は x を超えるからである。

である. $n > N$ とすれば

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{|A|^n}{n!} &< \frac{N^n}{n!} \\
 &\leq \frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{N^{n-(N-1)}}{N(N+1)^{n-N}} \\
 &= \frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{N^{n-N}}{(N+1)^{n-N}} \\
 &= \frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \left(\frac{N+1}{N}\right)^N \cdot \left(\frac{N}{N+1}\right)^n
 \end{aligned}$$

となる^{*2}. $0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

なので

$$a = \frac{N}{N+1}$$

とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{N+1}\right)^n = 0$$

を得る. 以上により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0.$$

オイラーの公式

$i^2 = -1$ となる数 i を虚数単位という. 複素数 $z = x + iy$ に対して z の絶対値は複素平面内での z の長さとして $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される. 無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

は収束するので e^z は

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

と定義される. とくに $x = 0, y = \theta$ すなわち $z = i\theta$ と表されるとき

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} \\
 &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\
 &= \cos \theta + i \sin \theta
 \end{aligned}$$

^{*2} $n > N$ なので $n!$ の中には $N+1$ 以上の項が $n-N$ 個含まれており $n! = n \cdot (n-1) \cdots (N+1) \cdot N! \geq (N+1)^{n-N} N! = (N+1)^{n-N} N(N-1)!$ となる.

が得られる.

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

第7章 積分 I

積分の説明

ここでは説明を簡単にするために連続関数 $f(x)$ は常に正の値をとるものとする。

連続関数 $f(x)$ と x -軸の囲む図形の面積を $a \leq x \leq b$ の範囲で求めることを考えよう。積分法とはこの様な図形の面積を計算するために考え出された方法である。求める面積を S とおく。まず x -軸に分点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ を以下の様に与える。

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

この分点を与えることで $a \leq x \leq b$ の範囲を小さな n 個の範囲

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

に分割したことになる。この分割のことを

$$\Delta_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

とかくことにする。分割 Δ_n を構成する各範囲

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

の幅の長さが k_0 番目において最大であるとする。このとき

$$L = x_{k_0} - x_{k_0-1} \quad (\text{分割の中で最大の幅})$$

とおく^{*1}。分割された各範囲 $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ の中からひとつずつ点

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

を選ぶ。この点に対し関数は $f(c_k)$ という値をとる。こうすると各範囲 $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ において、底辺の長さ l が

$$l = x_k - x_{k-1}$$

^{*1}すなわち、記号で書いてしまえば

$$L = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$

である。記号が苦手な場合もあるのでここでは言葉で説明した。

であり, 高さ h が

$$h = f(c_k)$$

の長方形ができる. この長方形の面積は

$$h \times l = f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

となる. これらを $k = 1$ から $k = n$ まですべて足し合わせると求める面積の値 S を近似したことになる. すなわち近似は

$$\begin{aligned} R(\Delta_n; f) &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

となる. $R(\Delta_n; f)$ を f のリーマン和という. 分割の幅 L を小さくするほど $R(\Delta_n; f)$ は実際の面積の値 S に近づく^{*2}. すなわち

$$S = \lim_{L \rightarrow 0} R(\Delta_n; f)$$

となる. この極限値を $f(x)$ の定積分 (リーマン積分) といい

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

と表す.

定積分の性質

定理. 連続関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して

- (1) $\int_a^b (cf(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx$ (定数 c)
- (2) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- (3) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$)

証明. (1)

$$\begin{aligned} R(\Delta_n; cf) &= \sum_{k=1}^n cf(c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= c \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= cR(\Delta_n; f) \end{aligned}$$

^{*2} この極限が収束することは自明ではないが連続関数については保証されている.

となる $\lim_{L \rightarrow 0} R(\Delta_n; cf) = \int_a^b (cf(x))dx$, $\lim_{L \rightarrow 0} cR(\Delta_n; f) = c \int_a^b f(x)dx$ なので上の式の両辺で $L \rightarrow 0$ とすれば

$$\int_a^b (cf(x))dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

(2)

$$\begin{aligned} R(\Delta_n; f+g) &= \sum_{k=1}^n (f(c_k) + g(c_k))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n g(c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= R(\Delta_n; f) + R(\Delta_n; g) \end{aligned}$$

なので両辺 $L \rightarrow 0$ とすれば

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(3) 範囲 $a \leq x \leq b$ の途中の点 $a < c < b$ を $x_m = c$ として加えた分割を

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とすれば, 元の分割 Δ_n はふたつの分割 Δ'_m, Δ'_n に分けられる. つまり

$$\Delta_n : a = \underbrace{x_0 < x_1 < \cdots < x_m}_{\Delta'_m} = c < \underbrace{\cdots < x_{n-1} < x_n}_{\Delta'_n} = b$$

と分けられる. また Δ'_m の最大の幅を L'_1 , Δ'_n の最大の幅を L'_2 とすると $L'_1, L'_2 \leq L$ なので $L \rightarrow 0$ のとき $L'_1 \rightarrow 0$, $L'_2 \rightarrow 0$ である. したがって

$$R(\Delta_n; f) = R(\Delta'_m; f) + R(\Delta'_n; f)$$

の両辺の $L \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

□

約束

積分の向きを逆にしたものを

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

と定める.

積分における平均値の定理

定理. 連続関数 $f(x)$ とする. このとき

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

をみたす $a < c < b$ が存在する.

この定理では $f(x)$ と x -軸の囲む図形の面積の値がある点における高さ $h = f(c)$ と $a \leq x \leq b$ の範囲の底辺の長さ $l = b - a$ の掛け算

$$h \times l = f(c)(b-a)$$

として得られることをいっている. すなわち $f(c)$ は高さの平均である.

微分積分学の基本定理

定理. 連続関数 $f(x)$ に対して以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right) = f(x).$$

ここで α は定数である^a.

^a文字 α はアルファと読む. a とは異なる文字なので注意.

証明. $h > 0$ の場合だけ考える ($h < 0$ の場合も同様).

$$\frac{1}{h} \left(\int_{\alpha}^{x+h} f(t)dt - \int_{\alpha}^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

となる. このとき積分における平均値の定理により

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

となる $x < c < x+h$ を選ぶことができる. このとき両辺において $h \rightarrow 0$ とすると $c \rightarrow x$ となるので

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x f(t)dt.$$

□

例題. 関数

$$F(x) = \int_0^x t^3 dt$$

とする. $F'(x)$, $F^{(2)}(x)$ を求めよ.

解答. $F'(x) = x^3$ である. $F^{(2)}(x) = (F'(x))' = (x^3)' = 3x^2$.

例題. 関数

$$F(x) = \int_0^x (x-t)t^3 dt$$

とする. $F^{(3)}(x)$ を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (xt^3 - t^4) dt \\ &= \int_0^x xt^3 dt - \int_0^x t^4 dt \\ &= x \int_0^x t^3 dt - \int_0^x t^4 dt \end{aligned}$$

と変形できる. この式を微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(x \int_0^x t^3 dt \right)' - \left(\int_0^x t^4 dt \right)' \\ &= \int_0^x t^3 dt + x \cdot x^3 - x^4 \\ &= \int_0^x t^3 dt. \end{aligned}$$

したがって $F^{(2)}(x) = x^3$ なので $F^{(3)}(x) = 3x^2$ となる.

第8章 積分 II

原始関数

微分すると関数 $f(x)$ になる関数, すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という.

定理. 連続関数 $f(x)$ とする. $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は必ず

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt + C$$

の形でかける. ここで定数 C .

証明. $F(x)$ は原始関数であるとしよう. すなわち $F'(x) = f(x)$ であるとする. このとき微分積分学の基本定理により

$$\begin{aligned} \left(F(x) - \int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' &= F'(x) - f(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

微分して0になったので中身は定数である. すなわち

$$F(x) - \int_{\alpha}^x f(t)dt = C.$$

□

定理. 連続関数 $f(x)$ の定積分は原始関数 $F(x)$ を用いて

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

と計算できる.

証明. 原始関数 $F(x)$ はいつも

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt + C$$

とかける. このとき

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx &= \int_a^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^b f(t)dt \\
 &= -\int_\alpha^a f(t)dt + \int_\alpha^b f(t)dt \\
 &= -\left(\int_\alpha^a f(t)dt + C\right) + \left(\int_\alpha^b f(t)dt + C\right) \\
 &= -F(a) + F(b) \\
 &= F(b) - F(a).
 \end{aligned}$$

□

不定積分

原始関数に任意定数 C を加えたものを不定積分といい $\int f(x)dx$ とかく. すなわち不定積分は原始関数 $F(x)$ に対して

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

とかいたものである.

原始関数と不定積分の違いが分かりにくいかもしれない. しかし実は両者は同じもののなので区別する必要はない. 不定積分と呼ぶ場合には記号を使って

$$\int f(x)dx$$

と表すというだけの違いである. 不定積分に別の定数を加えても再び

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

の形でかけるので不定積分である. これらの定数をまとめて積分定数と呼ぶ. 高校までの数学で不定積分を求めるときに

- 微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を求める
- 最後に積分定数を加えておく

理由はこのためである.

例. 底辺の長さが1, 高さが1 の直角三角形の面積が $1/2$ であることを定積分を用いて確かめてみよう. 関数 $y = f(x) = x$ の $0 \leq x \leq 1$ のグラフは三角形を表している. したがって $f(x)$ と x -軸の囲む面積が求める三角形の面積である. $f(x) = x$ の原始関数は

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

である. 原始関数は簡単なものをひとつ見つければ十分である. したがって定積分は

$$\begin{aligned}\int_0^1 x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$f(x) = x$ の原始関数は積分定数をかいて

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

ではないかと考えるかもしれない. しかし結局は

$$\begin{aligned}\int_0^1 x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + C \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + C - (0 + C) \\ &= \frac{1}{2} + C - C \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる. これが定積分の計算で積分定数がかかなくてよい理由である^a.

^aよく分からなければかいてしまって構わない. 計算に慣れてきたら必要ないことに気付くはずである.

発展的内容

次の定理では $F_n(x)$ は $f(x)$ を用いて定義されており n 階微分すると $f(x)$ となるので $f(x)$ の n 階原始関数と呼ぶことがある.

n 階原始関数

定理. 連続関数 $f(x)$ に対して

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \geq 1)$$

とすると $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ が成り立つ.

証明. 二項展開すると

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k+l=n-1} \frac{(n-1)!}{k!l!} x^k \int_{\alpha}^x (-1)^l t^l f(t) dt.$$

この式を微分すると

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k+l=n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!l!} x^{k-1} \int_{\alpha}^x (-1)^l t^l f(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k+l=n-1} \frac{(n-1)!}{k!l!} x^k (-1)^l x^l f(x) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k+l=n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!l!} x^{k-1} \int_{\alpha}^x (-1)^l t^l f(t) dt + (x + (-x))^{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{(k-1)+l=n-2} \frac{(n-2)!}{(k-1)!l!} x^{k-1} \int_{\alpha}^x (-1)^l t^l f(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{k+l=n-2} \frac{(n-2)!}{k!l!} x^k \int_{\alpha}^x (-1)^l t^l f(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-2} f(t) dt \\ &= F_{n-1}(x). \end{aligned}$$

これより

$$F_n^{(n-1)}(x) = F_1(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$$

なので $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ を得る. □

第9章 部分積分と置換積分

部分積分

定理. 導関数 $f'(x), g'(x)$ が連続な関数 $f(x), g(x)$ について以下が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

証明. 積の微分法により

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

となる. このことは

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

の原始関数が

$$f(x)g(x)$$

であることをいっている. したがって

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

左辺の第1項を右辺に移項すればよい. □

不定積分の部分積分

不定積分の部分積分の公式は

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

である. ただし積分定数を省略した.

部分積分を実行するときに積のどちらを微分と見做せばよいかというのがある. 大抵の場合は微分をしたら全体として簡単な式になる方を残しておくといよい. 残しておいた方の関数はあとから微分することになるからである. そのときに簡単な式になっていた方が積分の計算がしやすい.

例題. 定積分 $\int_1^e \log x dx$ を部分積分法を使って求めよ.

解答. 部分積分を適用するために

$$(x)' = 1$$

であることに着目する.

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x dx &= \int_1^e (x)' \log x dx \\ &= [x \log x]_1^e - \int_1^e x (\log x)' dx \\ &= [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= [x \log x]_1^e - \int_1^e dx \\ &= e \cdot \log e - 1 \cdot \log 1 - [x]_1^e \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

不定積分の場合は

$$\int \log |x| dx = x \log |x| - x + C$$

である.

例題. 定積分 $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ を部分積分法を使って求めよ.

解答. $\cos x = (\sin x)'$ と見做してやる. そうすると部分積分の2項目で $x' = 1$ の計算をすることになるので式全体が簡単になっていくことが期待できるからである. 実際にやってみると

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos x dx &= \int_0^{\pi/2} x(\sin x)' dx \\ &= [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x' \sin x dx \\ &= [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} - (-0 + 1) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

置換積分

定理. $f(x)$ は連続で $t = g(x)$ は導関数が連続であるとする. さらに $g(c) = a, g(d) = b$ をみたすとする. このとき以下が成り立つ.

$$\int_c^d f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

証明. $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする. 合成関数の微分法により

$$(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$$

が成り立つ. このことは

$$f(g(x))g'(x)$$

の原始関数が

$$F(g(x))$$

であることをいっている. したがって

$$\int_c^d f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x))]_c^d = [F(t)]_a^b = \int_a^b f(t)dt.$$

□

計算する上では積分の範囲を $a = g(c) \leq t \leq g(d) = b$ の範囲に変更して $g(x)$ を t と置き換えて

$$g'(x)dx = dt$$

と置いていることになる。置換積分の計算において

$$\frac{dt}{dx} = g'(x)$$

を分数の様に

$$\frac{dt}{dx}dx = g'(x)dx = dt$$

と扱ってよい理由は上の式が成り立つからである。

不定積分（原始関数）の公式があるような関数に複雑な式が代入されていたら置換積分を使えることが多い。複雑な部分を t とおけばよい。 t において公式のわかる式の形に寄せていくのである。

例題. 定積分 $\int_0^2 x^2 e^{x^3} dx$ を置換積分法を使って求めよ。

解答. 指数関数 e^x は不定積分の公式

$$\int e^x dx = e^x + C$$

がある。指数関数 e^x に x^3 という複雑な式が代入されているので

$$t = x^3$$

とおいてみる。 x が $x: 0 \rightarrow 2$ と動くとき t は $t: 0 \rightarrow 8$ と動く。

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx &= \frac{1}{3} \int_0^8 e^t dt \\ &= \frac{1}{3} (e^8 - 1). \end{aligned}$$

例題. 定積分 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ を置換積分法を使って求めよ.

解答. この問題は少し難易度が高い.

$$t = \sqrt{x^2 - 1}$$

とおく. x が $x: \sqrt{2} \rightarrow 2$ と動くとき t は $t: 1 \rightarrow \sqrt{3}$ と動く.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= [\tan^{-1} t]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}(1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

不定積分の置換積分

不定積分の置換積分の公式は $t = g(x)$ とおき

$$\int f(t) dt = \int f(g(x)) g'(x) dx$$

である^a. ただし積分定数を省略した.

^a実際に $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすれば

$$(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$$

なので

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) = F(t).$$

また

$$\int f(t) dt = F(t)$$

となるからである.

積分公式

基本的な不定積分の公式

積分定数 C とする.

$$(1) \int c dx = cx + C \quad (\text{定数 } c)$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{自然数 } n \geq 1)$$

$$(3) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(5) \int \tan x dx = -\log |\cos x| + C$$

$$(6) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(7) \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$(8) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (x > 0, \text{実数 } \alpha \neq -1)$$

$$(9) \int \log |x| dx = x \log |x| - x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$$

$$(11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$$

発展的内容

高次の部分積分公式

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ に対して積の記号を

$$f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x)$$

と定義する. 積の微分法を繰り返し用いると次を得る.

高次の積の微分公式

定理. 微分可能な関数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ の積に対して微分公式

$$\left(\prod_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^n f'_k(x) \prod_{l \neq k} f_l(x)$$

が成り立つ. ここで $\prod_{l \neq k}$ は k 番目の項以外を掛け合わせるという意味である.

この公式から

$$\sum_{k=1}^n f'_k(x) \prod_{l \neq k} f_l(x)$$

の原始関数のひとつが

$$\prod_{k=1}^n f_k(x)$$

であることが分かる. したがって次の公式を得る.

高次の部分積分公式

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ は微分可能で導関数が連続であるとする. このとき

$$\left[\prod_{k=1}^n f_k(x) \right]_a^b = \sum_{k=1}^n \int_a^b f'_k(x) \left(\prod_{l \neq k} f_l(x) \right) dx$$

が成り立つ.

上の式を見慣れた部分積分の公式の形に変形すると

$$\int_a^b f'_1(x) \left(\prod_{l \neq 1} f_l(x) \right) dx = \left[\prod_{k=1}^n f_k(x) \right]_a^b - \sum_{k=2}^n \int_a^b f'_k(x) \left(\prod_{l \neq k} f_l(x) \right) dx$$

となる.

テイラーの定理の積分型剰余項による表示

微分法において学習したテイラーの定理は剰余項が微分型（ラグランジュの剰余）であった. ここでは積分型の剰余項（ベルヌーイの剰余）を用いたテイラーの定理を紹介しよう.

テイラーの定理（ベルヌーイの剰余）

定理. 関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ が連続であるとする. このとき

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \mathcal{R}_n$$

が成り立つ. ここで, 剰余項

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} dx$$

はベルヌーイの剰余と呼ばれる.

証明. 部分積分により以下の計算を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (f^{(n-1)})'(x)(b-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} [f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-1}]_a^b - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n-1)}(x)(n-1)(b-x)^{n-2} \cdot (-1) dx \\ &= -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^b f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2} dx. \end{aligned}$$

同じ計算を最後の式の右辺第2項目に対して行くと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-2)!} \int_a^b f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2} dx \\ &= -\frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a)(b-a)^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!} \int_a^b f^{(n-2)}(x)(b-x)^{n-3} dx. \end{aligned}$$

この計算を $n-1$ 回繰り返して, 微分積分学の基本定理を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} dx &= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b f'(x) dx \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f(b) - f(a) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f(b). \end{aligned}$$

以上より求める式を得る.

□

テイラーの定理（ベルヌーイの剰余）で $n = 1$ のとき得られる式は微分積分学の基本定理により得られる式である．したがってテイラーの定理（ベルヌーイの剰余）は微分積分学の基本定理の一般化といえる．

第10章 広義積分

広義積分

関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

は $x = 0$ で定義されない. この関数の範囲 $0 \leq x \leq 1$ における積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

で定義される. また関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$$

に対する積分範囲の長さが無限に長い積分は

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$$

で定義される.

広義積分の定義式

- $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx$ ($x = a$ で定義されない関数)
- $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$ ($x = b$ で定義されない関数)
- $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$ (積分範囲の長さが無限に長い)
- $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx$ (積分範囲の長さが無限に長い)

例. 以下の関数は () 内の点で定義されない.

- $f(x) = \log |x| \quad (x = 0)$
- $f(x) = \frac{1}{x-a} \quad (x = a)$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (x = \pm a)$

例題. 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} [2\sqrt{x}]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{c}) \\ &= 2. \end{aligned}$$

広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

は $y = 1/\sqrt{x}$ のグラフとして表される底辺の長さ l が $l = 1$ で高さが無限大の図形の面積が 2 であることをいっている. これは底辺の長さ l が $l = 1$, 高さ h が $h = 5$ の直角三角形の面積 $S = 5/2$ よりも小さな値である.

例題. 広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^c \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{c} + 1 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

は $y = 1/x^2$ のグラフとして表される底辺の長さが無限大で高さ h が $h = 1$ の図形の面積が 1 であることをいっている. これは底辺の長さ l が $l = 3$, 高さ h が $h = 1$ の直角三角形の面積 $S = 3/2$ よりも小さな値である.

例題. 広義積分 $\int_0^1 \log x dx$ を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log x dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 \log x dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} [x \log x - x]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow +0} (1 \cdot \log(1) - 1 - c \log c + c) \\ &= -1. \end{aligned}$$

例題. 広義積分 $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ を求めよ.

解答.

$$\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right)' = x e^{-x^2}$$

なので

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^c \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (-e^{-c^2} + 1) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] 杉浦 光夫
解析入門 I
東京大学出版会
- [2] 鈴木 武, 山田 義雄, 柴田 良弘, 田中 和永 共著
微分積分学 I
内田老鶴圃
- [3] 高木 貞治
解析概論
岩波書店
- [4] 難波 誠
微分積分学
裳華房
- [5] 福井 常孝, 上村 外茂男, 入江 昭二, 宮寺 功, 前原 昭二, 境 正一郎 共著
解析学入門
内田老鶴圃