

微分積分学
(Calculus)
参考資料

作成者^{*1}：星埜 岳

^{*1}数式組版ソフト L^AT_EX による作成

目次

第1章	上限・下限	5
第2章	数列 I	11
第3章	数列 II	15
第4章	カントールの区間縮小法	21
第5章	ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理	27
第6章	関数の連続性と中間値の定理	31
第7章	最大値・最小値の定理	37
第8章	関数の一様連続性	39
第9章	微分法と平均値定理	45
第10章	テイラーの定理	51
第11章	定積分	55
第12章	微分積分学の基本定理と広義積分	61

第1章 上限・下限

記法

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $a \leq b$: $a = b$ または $a < b$
- $a \geq b$: $a = b$ または $a > b$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

最大数・最小数

以下において一般の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ を扱うが, この様な集合 A の具体例として区間 $I = [0, 1]$ などを想定すればよい.

最大数

集合 $A \subset \mathbb{R}$ の最大数 $M = \max A$ とは

- (1) $M \in A$
- (2) 任意の $x \in A$ 対して $M \geq x$

のふたつを満たすものとして定義される.

例. $I = [a, b]$ の最大数 $M = \max I$ が

$$M = b$$

であることを確かめてみよう. 上の (1) の条件については $b \in I$ なので確かに満たす. (2) の条件については任意の $x \in I$ に対して $b \geq x$ なので確かに満たしている. したがって $M = b$ である.

最小数

集合 $A \subset \mathbb{R}$ の最小数 $m = \min A$ とは

- (1) $m \in A$
- (2) 任意の $x \in A$ 対して $m \leq x$

のふたつを満たすものとして定義される.

例. $I = [a, b]$ の最小数 $m = \min I$ が

$$m = a$$

であることを確かめてみよう. 上の (1) の条件については $a \in I$ なので確かに満たす. (2) の条件については任意の $x \in I$ に対して $a \leq x$ なので確かに満たしている. したがって $m = a$ である.

上界・下界

集合の記法のおさらい

まず集合の記法についておさらいする. 集合 X について

$$X = \{a, b, c, \dots\}$$

の様に X の元を具体的に書き下す記法を外延的記法という. 集合 X の元 x がある条件 $P(x)$ を満たすものとして定義されているとき

$$X = \{x; P(x)\}$$

とかく. この記法を内包的記法という.

例. X が以下の様に内包的記法で表されているとしよう.

$$X = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x - 3 = 0\}.$$

これを外延的記法で書き直してみよう. まずこの場合の条件 $P(x)$ は方程式 $x^2 + 2x - 3 = 0$ を満たすという事である.

$$P(x): x \text{ は方程式 } x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ を満たす.}$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \text{ なので } x = -3, 1 \text{ となる.}$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x - 3 = 0\} = \{-3, 1\}.$$

上界

集合 $A \subset \mathbb{R}$ とする.

$$U(A) = \{a \in \mathbb{R}; \text{すべての } x \in A \text{ に対して } a \geq x\}$$

とする. この集合の元 $a \in U(A)$ を A の上界という. $U(A)$ は A の上界全体の集合である.

例. 区間 $I = (a, b)$ の上界全体の集合は

$$U(I) = [b, \infty)$$

である.

下界

集合 $A \subset \mathbb{R}$ とする.

$$L(A) = \{a \in \mathbb{R}; \text{すべての } x \in A \text{ に対して } a \leq x\}$$

とする. この集合の元 $a \in L(A)$ を A の下界という. $L(A)$ は A の下界全体の集合である.

例. 区間 $I = (a, b)$ の下界全体の集合は

$$L(I) = (-\infty, a]$$

である.

上限・下限

ここでは実数の連続性については深く立ち入らないが以下の実数の連続性公理を認めることにする.

実数の連続性公理

- $A \subset \mathbb{R}$ は $U(A) \neq \emptyset$ をみたすとする. このとき $U(A)$ の最小数が存在する.
- $A \subset \mathbb{R}$ は $L(A) \neq \emptyset$ をみたすとする. このとき $L(A)$ の最大数が存在する.

上限

$A \subset \mathbb{R}$ の上界が存在する. すなわち $U(A) \neq \emptyset$ とする. このとき

$$\min U(A)$$

が存在する^a. これを A の上限といい

$$\sup A = \min U(A)$$

と書く.

^a実数の連続性公理によって存在が保証される.

例. $I = (a, b)$ の上界全体の集合は $U(I) = [b, \infty)$ であり

$$\sup I = \min U(I) = \min[b, \infty) = b.$$

下限

$A \subset \mathbb{R}$ の下界が存在する. すなわち $L(A) \neq \emptyset$ とする. このとき

$$\max L(A)$$

が存在する^a. これを A の下限といい

$$\inf A = \max L(A)$$

と書く.

^a実数の連続性公理によって存在が保証される.

例. $I = (a, b)$ の下界全体の集合は $L(I) = (-\infty, a]$ であり

$$\inf I = \max L(I) = \max(-\infty, a] = a.$$

上限の特徴づけ

定理. $A \subset \mathbb{R}$ について次のことが言える.

$$\alpha = \sup A$$

$\Longleftrightarrow$
同値

$$\begin{cases} (1) \text{ 任意の } x \in A \text{ に対して } x \leq \alpha \\ (2) \text{ 任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } x \in A \text{ が存在し } \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

証明. $\Rightarrow$) (1) は α が上限であることから明らかである. (2) を否定すると $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $x \in A$ に対して $\alpha - \varepsilon \geq x$ となる. これは α が上限であることに矛盾する.
 $\Leftarrow$) (1) により α は A の上界の一つである. α' で $\alpha' < \alpha$ なる A の上界が存在したとすると $\varepsilon = \alpha - \alpha' > 0$ として (2) により $x \in A$ が存在し

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon &= \alpha - (\alpha - \alpha') \\ &= \alpha' \\ &< x \end{aligned}$$

となり α' は A の上界でない. これは矛盾なので α は A の上限である. $\square$

$\alpha = \sup A$ は A を上から頭打ちにする実数である^a. A 自身に $\alpha = \sup A$ を含むこともあるし含まないこともある. 含まない場合は $\alpha = \sup A$ のいくらでも近くに, しかし α には到達しない A の元が存在するのである.

^a正確には頭打ちという専門用語は数学にはない. ここではその数を超えないという意味で使った.

下限の特徴づけ

定理. $A \subset \mathbb{R}$ について次のことが言える.

$$\beta = \inf A$$

$\Longleftrightarrow$
同値

$$\begin{cases} (1) \text{ 任意の } x \in A \text{ に対して } x \geq \beta \\ (2) \text{ 任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } x \in A \text{ が存在し } \beta + \varepsilon > x \end{cases}$$

証明. 証明は上限の特徴づけの証明と同様である. $\square$

三角不等式

定理. $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1) \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(2) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

が成り立つ.

証明. (1) $|a| = \max(a, -a)$ なので

$$\begin{aligned} |x + y| &= \max(-(x + y), x + y) \\ &= \max(-x - y, x + y) \\ &\leq \max(|x| + |y|, |x| + |y|) \\ &= |x| + |y|. \end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \\ &\leq |x - y| + |y|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y| &= |y - x + x| \\ &\leq |x - y| + |x|, \end{aligned}$$

なので

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

第2章 数列 I

数列 $\{a_n\}$ の極限について定義を与える. 高校の数学では数列の極限が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であることを n が限りなく大きくなるとき a_n は a に限りなく近づくものと習う. この定義では“限りなく”がどの程度のことなのか明確でないので分かりにくいと思うかもしれない. そこでこの章では数列の極限について誰でも共通の認識を持てる様に改めて定義を導入する.

数列の極限のコーシーによる定義

数列 $\{a_n\}$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N = N(\varepsilon) \geq 1$ が存在して $n \geq N$ ならば

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき α を極限值といい $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とかく. このことを $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$ とか $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ とかくことがある.

番号 $n = N$ より先の項は α から ε 程度離れた範囲内に収まっている. 多くの収束する数列の場合において, より小さな ε の範囲内に収めるには N をより大きくとる.

なぜ今更こんなに難解な定義を持ち出したのか疑問に思う人もいるかもしれない. その理由のひとつとして, これからさらに勉強が進むと二重の極限を考えたりすることがあるがそういう時には ε - N 論法 (あるいは後述の ε - δ 論法) を用いると本質的に議論の見通しが良くなり明解になることが挙げられる. そのときの為に微分積分学を学ぶ段階で ε - N 論法 (ε - δ 論法) の様式を身につけておく必要がある. しかし初等的な微分積分学の範囲でも, 次の定理の証明では ε - N 論法が役にたつ.

定理 (総和平均). 数列 $\{a_n\}$ は極限值をもつとする. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

であるとする. このとき, 総和平均の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_1 = N_1(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n \geq N_1$ ならば

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ.

$$m = \max(|a_1 - a|, |a_2 - a|, \dots, |a_{N_1-1} - a|)$$

とおく. このとき $N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n \geq N_2$ ならば

$$\frac{(N_1 - 1)m}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. $N = \max(N_1, N_2)$ とすると $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \dots + |a_{N_1-1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_1} - a| + \dots + |a_n - a|}{n} \\ & \leq \frac{(N_1 - 1)m}{n} + \frac{|a_{N_1} - a| + \dots + |a_n - a|}{n} \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - (N_1 - 1)) \varepsilon}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

例. 上の定理の逆は成り立たない. つまり総和平均が収束しても極限值を持たない数列がある. 実際に $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

とすると

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & (n : \text{奇数}) \\ 0 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

なので総和平均は 0 に収束する. ところが a_n は振動しているので極限值を持たない.

極限值の一意性

定理. 数列 $\{a_n\}$ の極限值は存在すれば一意的である. すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ならば $a = b$ である.

証明. $a \neq b$ とする. $|a - b| = 2\varepsilon > 0$ とすれば $N_1 = N_1(\varepsilon) \geq 1$ が存在して

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (n \geq N_1)$$

が成り立つ. また $N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在して

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad (n \geq N_2)$$

が成り立つ. $N = \max(N_1, N_2)$ とおくと $n \geq N$ のとき

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| < 2\varepsilon.$$

これは矛盾である. すなわち $a = b$. □

はさみうちの原理

定理. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

が存在し

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

をみたすとする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_1 = N_1(\varepsilon) \geq 1$, $N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在し

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \quad (n \geq N_1), \\ |b_n - a| &< \varepsilon \quad (n \geq N_2) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$N = \max(N_1, N_2)$$

とおくと $n \geq N$ ならば

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

が成り立つ. $a_n \leq c_n \leq b_n$ なので $n \geq N$ ならば

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

すなわち

$$|c_n - a| < \varepsilon.$$

□

定理. 定数 $a \geq 0$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 \leq a < \varepsilon$ をみたすならば $a = 0$ である.

証明. 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = a$ ($n \geq 1$) と定義する. 明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ である. 一方で, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n \geq 1$ ならば $|a_n - 0| = a < \varepsilon$. すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 極限値の一意性により $a = 0$. □

第3章 数列 II

有界

上に有界

数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$a_n \leq M \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことをいう.

下に有界

数列 $\{a_n\}$ が下に有界であるとは $m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$a_n \geq m \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことをいう.

上にも下にも有界な数列を単に有界という.

例 (上に有界な数列の具体例). 数列

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

は上に有界である. 実際にそれを確かめるには $n \geq 1$ ということから

$$n+1 \geq 1+1=2$$

なので両辺の逆数を取ると^a

$$a_n = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

となるから $M = 1/2$ として有界であることがいえた.

^a大きい数の逆数は小さくなる. すなわち大きい数を分母にすると分数全体としては小さくなるということを再認識しよう.

収束列の重要な性質

定理. 収束する数列 $\{a_n\}$ は有界である. すなわち定数 $M > 0$ が存在して

$$|a_n| \leq M \quad (n \geq 1)$$

となる.

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるとする. このとき収束の定義を満たすのだから $\varepsilon > 0$ に対して番号 $N \geq 1$ が決まって

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

となる. 三角不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|$ を用いて, これらの項に対して

$$|a_n| < \varepsilon + |\alpha| \quad (n \geq N)$$

が言えるので有限個の項を除いたものは有界であることがわかった. 有限個の項の中で最大のものを考えれば有限個の $|a_n|$ も有界. ここで三角不等式より

$$|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon + |\alpha|$$

であることを用いた. □

極限と四則演算

収束する数列は四則演算と相性が良い.

数列の極限值と四則演算 $(+, -, \times, \div)$

定理. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

をみたすとする. このとき次の (1) ~ (3) がなりたつ.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \alpha + c_2 \beta \quad \text{ただし } c_1, c_2 \text{ は定数}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{ただし } a_n \neq 0 \text{ と } \alpha \neq 0 \text{ の場合}$$

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ とする. 以下の (1) ~ (3) ではそれぞれの場合によって異なる $N_1, N_2 \geq 1$ がとれる.

(1) $c_1, c_2 \neq 0$ と考えれば十分である. $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束するという仮定により $N_1 = N_1(\varepsilon) \geq 1$ と $N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在し

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|} \quad (n \geq N_1),$$

$$|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|} \quad (n \geq N_2)$$

が成り立つ. したがって $N = \max(N_1, N_2)$ に対して $n \geq N$ ならば

$$|c_1 a_n + c_2 b_n - (c_1 \alpha + c_2 \beta)| \leq |c_1| |a_n - \alpha| + |c_2| |b_n - \beta| < \varepsilon$$

となる.

(2) $\{b_n\}$ は収束するので有界である. すなわち $M > 0$ が存在し $|b_n| \leq M$ ($n \geq 1$). また $N_1 = N_1(\varepsilon) \geq 1$ と $N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在し

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n \geq N_1),$$

$$|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} \quad (n \geq N_2)$$

が成り立つ. したがって $N = \max(N_1, N_2)$ に対して $n \geq N$ ならば

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| |b_n| + |\alpha| |b_n - \beta| < \varepsilon.$$

(3) $N_1 = N_1(|\alpha|) \geq 1$ と $N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在し

$$|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2} \quad (n \geq N_1),$$

$$|a_n - \alpha| < \frac{\alpha^2 \varepsilon}{2} \quad (n \geq N_2)$$

が成り立つ. したがって $N = \max(N_1, N_2)$ に対して $n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \left| \frac{a_n - \alpha}{\alpha a_n} \right| < \frac{2|a_n - \alpha|}{\alpha^2} < \varepsilon.$$

□

単調性

単調増加列

数列 $\{a_n\}$ が単調増加列であるとは

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすことをいう.

単調減少列

数列 $\{a_n\}$ が単調減少列であるとは

$$a_{n+1} \leq a_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすことをいう.

単調増加列と単調減少列を総称して単調数列と呼ぶことにする. 必要であれば増加か減少か細かく分類して呼ぶ.

有界な単調数列の重要な性質

有界な単調数列は収束する

定理. 次が成り立つ.

- 上に有界な単調増加列 $\{a_n\}$ は極限值をもつ
- 下に有界な単調減少列 $\{a_n\}$ は極限值をもつ

証明. 上に有界な単調増加列に対して証明する. 下に有界な単調減少列についても同様である. $\{a_n\}$ は上に有界なので上界が存在するので $A = \{a_n; n \geq 1\}$ の上界全体の集合を $U(A)$ とおく. このとき a_n の上限

$$\sup_{n \geq 1} a_n = \sup\{a_n; n \geq 1\} = \min U(A) = \alpha$$

が存在する. 上限ということから, すべての $n \geq 1$ に対して

$$a_n \leq \alpha$$

が言える. α は上界全体の中での最小数なので $\varepsilon > 0$ に対して $\alpha - \varepsilon \notin U(A)$ である. さらに a_n は単調増加なので番号 $N \geq 1$ が決まって

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha \quad (n \geq N)$$

となることがわかる. このことは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \sup_{n \geq 1} a_n$ を意味している. □

例 (単調減少列の具体例). 数列

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} \quad (n \geq 1)$$

は単調減少列である. 実際にそれを確かめてみると $n \geq 1$ であるから

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + 1 &= n^2 + 2n + 2 \\ &\geq n^2 + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. 両辺の逆数をとると

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1} = a_n$$

すなわち $a_{n+1} \leq a_n$ が結論された. これより単調減少列である.

例題. 数列 $\{a_n\}$ を以下の漸化式で定める

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \quad (n \geq 1), \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

このとき

- (1) $\{a_n\}$ は単調減少列であることを確かめよ.
- (2) $\{a_n\}$ は下に有界であることを確かめよ.
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在すればその値を求めよ.

解答. (1)

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n + \sqrt{2})(a_n - \sqrt{2})}{2a_n},$$

$$a_n - \sqrt{2} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2a_{n-1}} > 0 \quad (n \geq 2)$$

なので単調減少列である.

(2) $a_1 > 0$ なので漸化式より $a_2 > 0$ がわかる. これを繰り返すと $a_n > 0$ がいえるので a_n は下に有界である.

(3) (1), (2) より極限値の存在が保証される. それを $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とおく. 漸化式の両辺で $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha}$$

を得るのでこれを解くと $\alpha = \sqrt{2}$ となる.

第4章 カントールの区間縮小法

定理. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ とする. $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束するとする. このとき

$$a_n \leq b_n \quad (n \geq 1)$$

ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

である.

証明. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とおく. $a > b$ と仮定して矛盾を導く. $a - b = \varepsilon > 0$ とおく. このとき $N_1 = N_1(\varepsilon) \geq 1, N_2 = N_2(\varepsilon) \geq 1$ が存在し

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N_1), \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N_2). \end{aligned}$$

このとき $N = \max(N_1, N_2)$ とおくと $n \geq N$ ならば

$$b_n < b + \frac{\varepsilon}{2} = a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n$$

となり矛盾. したがって $a \leq b$. □

カントールの区間縮小法

定理. 閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n \geq 1$) について次の (1), (2) を仮定する.

$$(1) \quad I_{n+1} \subset I_n \quad (n \geq 1).$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

このとき全ての $n \geq 1$ に対して I_n に属する唯一の $c \in \mathbb{R}$ が存在する. すなわち^a

$$\{c\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n.$$

とくに $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

^aここで現れる記法は $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x; \text{すべての } n \geq 1 \text{ に対して } x \in I_n\}$ の意味である.

証明. 仮定により

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

であるから, $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ上に有界な単調増加列, 下に有界な単調減少列である. したがってそれぞれ $a \in \mathbb{R}$ と $b \in \mathbb{R}$ に収束し前の定理により

$$a \leq b$$

である. 仮定の (2) により任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N = N(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n \geq N$ ならば

$$0 \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

したがって

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

なので

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性により

$$a = b.$$

これを

$$c = a = b$$

とおく. このときすべての $n \geq 1$ に対して

$$a_n \leq c \leq b_n$$

が成り立っているので

$$c \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$$

が成り立つ. $d \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$ が存在したとすれば

$$a_n \leq d \leq b_n$$

なので

$$a_n - b_n \leq c - d \leq b_n - a_n.$$

はさみうちの原理により $c = d$ を得る. したがって

$$\{c\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n.$$

□

コーシー列と実数の完備性

コーシー列

数列 $\{a_n\}$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \geq 1$ が存在し $n, m \geq N$ ならば

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

を満たすとき $\{a_n\}$ はコーシー列であるという.

遠方であまり変動しない数列をコーシー列というのである. すなわち, ある番号 $N \geq 1$ より先では異なる項の差 $|a_n - a_m|$ が ε 程度の範囲内に収まる数列をコーシー列という.

定理. 数列 $\{a_n\}$ が収束することの必要十分条件は $\{a_n\}$ がコーシー列であることである.

証明. (必要性) 収束列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることは明らかである.

(十分性) 逆にコーシー列 $\{a_n\}$ が収束列であることを示そう. コーシー列という仮定により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N = N(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n, m \geq N$ ならば

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$$

が成り立つ. とくに $m = N$ に対して成り立つので

$$a_N - \frac{\varepsilon}{4} < a_n < a_N + \frac{\varepsilon}{4} \quad (n \geq N)$$

が成り立つ. したがって

$$\min \left(\inf_{1 \leq k \leq N-1} a_k, a_N - \frac{\varepsilon}{4} \right) \leq a_n \leq \max \left(\sup_{1 \leq k \leq N-1} a_k, a_N + \frac{\varepsilon}{4} \right) \quad (n \geq 1)$$

なので $\{a_n\}$ は有界である. 数列 $\{A_n\}, \{B_n\}$ を

$$A_n = \inf_{k \geq n} a_k \quad (n \geq 1),$$

$$B_n = \sup_{k \geq n} a_k \quad (n \geq 1)$$

と定める. このとき

$$A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots \leq B_n \leq \cdots \leq B_2 \leq B_1$$

が成り立つ. また $n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}
 B_n - A_n &\leq B_N - A_N \\
 &= \sup_{k \geq N} a_k - \inf_{k \geq N} a_k \\
 &\leq a_N + \frac{\varepsilon}{4} - \left(a_N - \frac{\varepsilon}{4}\right) \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがってカントールの区間縮小法により $a \in \mathbb{R}$ が存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = a.$$

$A_n \leq a_n \leq B_n$ ($n \geq 1$) なのではさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

すなわち $\{a_n\}$ は収束する. □

実数においてコーシー列が収束するという性質を**実数の完備性**という.

数列 $\{a_n\}$ が収束するか判定する場合は極限值を求めたくなるかもしれない. しかし $\{a_n\}$ がコーシー列であることがわかれば具体的に極限值を求めなくても収束が保証されていることになる.

定理. 数列 $\{a_n\}$ は定数 $0 < c < 1$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}| \quad (n \geq 2)$$

をみたしているとする. このとき $\{a_n\}$ はコーシー列である.

証明. 仮定の不等式を $n - 1$ 回繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
 |a_{n+1} - a_n| &\leq c|a_n - a_{n-1}| \\
 &\leq c^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \\
 &\vdots \\
 &\leq c^{n-1}|a_2 - a_1|
 \end{aligned}$$

を得る. $n > m$ として

$$\begin{aligned}
 |a_n - a_m| &= |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} - a_m| \\
 &\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \quad (\text{三角不等式}) \\
 &\leq (c^{n-2} + c^{n-3} + \cdots + c^{m-1}) |a_2 - a_1| \\
 &= c^{m-1} (c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \cdots + 1) |a_2 - a_1| \\
 &= c^{m-1} \frac{1 - c^{n-m}}{1 - c} |a_2 - a_1| \\
 &\leq \frac{c^{m-1}}{1 - c} |a_2 - a_1| \xrightarrow{n > m \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

よって $\{a_n\}$ はコーシー列である.

□

例題. 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} & (n \geq 1), \\ a_1 \geq 0 \end{cases}$$

で定める. このとき

- (1) $\{a_n\}$ はコーシー列である事を確かめよ.
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在すればその値を求めよ.

解答. (1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1} \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}} \quad (\text{有理化した}) \\ &\leq \frac{1}{2} (a_n - a_{n-1}) \quad (\text{分母は2以上である}) \end{aligned}$$

を得る. これは上の定理の条件を $c = 1/2$ としてみたしている. したがって定理よりコーシー列である.

(2) (1) より $\{a_n\}$ はコーシー列であるから収束するので $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とおく. $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ の両辺の極限をとると

$$a = \sqrt{a + 1}$$

を得る^a. 両辺を二乗して $a > 0$ であることから

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

^a任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N = N(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ. したがって $n \geq N$ のとき $|\sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a + 1}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a + 1}} \leq \frac{|a_n - a|}{2} < \varepsilon$ が成り立つので $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + 1} = \sqrt{a + 1}$ である. これは, 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) の連続性からいえることであるが現時点ではまだ関数の連続性に触れていないので数列の枠組みでの説明が必要である.

第5章 ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

部分列

部分列

数列 $\{a_n\}$ について

$$n(1) < n(2) < \cdots < n(k) < \cdots$$

に対して $\{a_{n(k)}\} = \{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}$ の部分列という.

数列

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

に対して $n(k) = 2k + 1$ のとき部分列は

$$a_{n(k)} = \frac{1}{2k+1} \quad (k \geq 1)$$

となる. この例では番号 $n(k)$ が奇数として規則正しいものが与えられたが一般には

$$n(k) = 3, 4, 5, 9, 13, 16, 17, 18, 35, \dots$$

の様に無造作に羅列された不規則な番号 $n(k)$ も許容される.

ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

定理. 有界な数列 $\{c_n\}$ は収束する部分列をもつ.

証明. 有界性により $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ が存在し, 任意の $n \geq 1$ に対して

$$a_1 \leq c_n \leq b_1$$

となる. 区間 $[a_1, b_1]$ を次の二つに分ける

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right], \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right].$$

このどちらかに $\{c_n\} = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ の値が無限個含まれているので^{*1}, それを新たに

$$[a_2, b_2]$$

とおく. この手続きを続けて区間

$$[a_k, b_k] \quad (k \geq 1)$$

を定める列 $\{a_k\}, \{b_k\}$ を定義する. $\{a_k\}$ は上に有界な単調増加列, $\{b_k\}$ は下に有界な単調減少列となる. したがってそれぞれの極限值 $a, b \in [a_1, b_1]$ が存在する. さらに区間の構成の仕方から k 番目の区間の幅は

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}(b_1 - a_1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

したがってカントールの区間縮小法により

$$a = b.$$

区間の構成の仕方から $[a_k, b_k]$ ($k \geq 1$) に含まれる $\{c_n\}$ の部分列 $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ で

$$c_{n(k)} \in [a_k, b_k], \quad n(1) < n(2) < \dots$$

なるものをとれる.

$$a_k \leq c_{n(k)} \leq b_k \quad (k \geq 1)$$

なので, はさみうちの原理により部分列 $\{c_{n(k)}\}$ は $a \in [a_1, b_1]$ に収束する. □

^{*1}これは数列をグラフとして描いたときの値を並べたものなので, 別の番号 n に対応する値 c_n は別のものとして扱う. 例えば $c_n = (-1)^n$ の場合は $\{c_n\} = \{-1, +1, -1, \dots\}$ であるとする.

例題. 数列 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ($n \geq 1$) に対して

- (1) 部分列 a_{2k+1} を求めよ.
- (2) 極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$ を求めよ.
- (3) 部分列 a_{2k} を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ を求めよ.

解答. (1) a_n に $n = 2k + 1$ を代入すれば良い.

$$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{\sqrt{(2k+1)^2 + 1}} = (-1) \cdot \frac{2k+1}{\sqrt{4k^2 + 4k + 2}}.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \cdot \frac{2k+1}{\sqrt{4k^2 + 4k + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \cdot \frac{2 + \frac{1}{k}}{\sqrt{4 + \frac{4}{k} + \frac{2}{k^2}}} = -1.$$

(3) a_n に $n = 2k$ を代入すれば良い.

$$a_{2k} = (-1)^{2k} \cdot \frac{2k}{\sqrt{(2k)^2 + 1}} = \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}.$$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{1}{k^2}}} = 1.$$

例題. 数列 $\{a_n\}$ とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{2}{\sqrt{1 + |a_n|}}$ ($n \geq 1$) と定める. このとき, ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理を用いて $\{b_n\}$ は収束する部分列を持つ事を確かめよ.

解答. まず $b_n > 0$ なので下に有界である. また

$$\frac{2}{\sqrt{1 + |a_n|}} \leq \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$$

なので上に有界である. よって, ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理より有界な数列は収束する部分列をもつので $\{b_n\}$ は収束する部分列をもつ.

第6章 関数の連続性と中間値の定理

初等関数

- $f(x) = x^n \quad (n \geq 1)$
- $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = \tan x$
- $f(x) = a^x \quad (a > 0)$
- $f(x) = \log_a x \quad (a > 0)$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \log x$

本来であれば指数関数は有理数の稠密性を用いて定義されるものである。また合成関数や逆関数についても定義を述べる必要がある。しかしここでの目的は微積分の理論の枠組みを概観することなので詳細は省略する。

関数の極限のコーシーによる定義

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $a \in \mathbb{R}$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|x - a| < \delta$ ($x \in I$) ならば

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となるとき α を極限值といい $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ とかく。このことを文脈によって $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$ とか $f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a)$ とかくことがある。

ここで、注意したいのは極限值が確定するのは右側極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と左側極限 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ の両者が一致する場合そのときに限るのである。

例 (右側極限と左側極限が一致しない具体例). 関数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) は $x = 0$ において極限值が存在しない. なぜならば右側からの極限は

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$$

である. 一方で左側からの極限は

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1$$

となり両者が一致しないからである.

極限・連続性と四則演算

関数の極限值と四則演算 ($+$, $-$, $\times$, $\div$)

定理. $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ とする. 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$$

をみたすとする. このとき次の (1) ~ (3) がなりたつ.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \alpha + c_2 \beta \quad \text{ただし } c_1, c_2 \text{ は定数}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{ただし } f(x) \neq 0 \text{ と } \alpha \neq 0 \text{ の場合}$$

証明. 証明は数列の場合と同様なので, ここでは証明を省略する. □

連続

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする. 関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が $a \in I$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ が存在し^a $|x - a| < \delta$ ($x \in I$) ならば

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つこと, すなわち

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a)$$

が成り立つことをいう. 連続であるような関数を連続関数という. f が任意の $a \in I$ で連続なとき f は I 上で連続であるという.

^a a における連続の定義では δ は一般に a に依存して決定される.

連続関数と四則演算 (+, −, ×, ÷)

定理. 関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ は I 上で連続であるとする. このとき以下の (1) ~ (3) の関数も I 上で連続である.

(1) $c_1 f + c_2 g$ ただし c_1, c_2 は定数

(2) fg

(3) $\frac{1}{f}$ ただし $f(x) \neq 0$ の場合

証明. 極限に対して成り立つ性質より明らかである. □

例 (連続関数の具体例). 関数 $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) はすべての点 $x = a$ で連続であることを示してみよう. $f(a) = a^2$ である. 一方で, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \min(1, \varepsilon/(1 + 2|a|)) > 0$ と選ぶと $|x - a| < \delta$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(a)| = |x - a|(|x| + |a|) < \delta(1 + 2|a|) \leq \varepsilon$$

となる. すなわち

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$$

なので連続である.

例 (不連続な関数の具体例).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 1 & (x < 0) \end{cases}$$

は原点 $x = 0$ において不連続な関数である. 原点において関数の値がジャンプしている. 実際に $\varepsilon = 1/2$ に対して, 任意の $\delta > 0$ に対して $x < 0$ を $|x| = \min(1/4, \delta)$ と選ぶと $|x| < \delta$ かつ $|f(x) - f(0)| \geq 15/16 > 1/2$.

単調増加関数・単調減少関数

$I \subset \mathbb{R}$ とする. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x > y$ をみたす $x, y \in I$ に対して $f(x) \geq f(y)$ をみたすとき f は単調増加関数であるという. また $x > y$ をみたす $x, y \in I$ に対して $f(x) \leq f(y)$ をみたすとき f は単調減少関数であるという.

例. 関数 $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) は単調増加関数である. 指数関数は有理数の稠密性を用いて定義される. そのときに高校以来よく知られた指数法則や単調性も示される. ここでは指数関数の定義の仕方には触れない事にする. また今後の議論において, 指数関数の単調性などの性質を用いることがある.

中間値の定理

中間値の定理

定理. $I = [a, b]$ とする. 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は I において連続で $f(b) < f(a)$ を満たすとする. このとき任意の $f(b) < \mu < f(a)$ に対して $c \in I$ が存在して

$$\mu = f(c)$$

となる. $f(a) < f(b)$ の場合も同様のことが成り立つ.

証明. $f(a) < f(b)$ とする.

$$f(a) < \mu < f(b)$$

なる μ に対して

$$A = \{x \in [a, b]; f(x) < \mu\}$$

を定義すると. A は上に有界だから $c = \sup A \in [a, b]$ が存在する. c が上限であることにより数列 $\{a_n\} \subset A$ を $a \leq a_n \leq c$ および $a_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすように選べる. 実際に任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x \in A$ が存在し

$$x + \varepsilon > \sup A$$

が成り立つので $\varepsilon = 1/n$ として

$$c - \frac{1}{n} < a_n \leq c$$

となるような $a_n \in A$ がとれる. はさみうちの原理により $a_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) となる. $f(a_n) < \mu$ により f の連続性から^{*1}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq \mu.$$

一方 $c = \sup A$ だから $c < x \leq b$ ならば $\mu \leq f(x)$ であることがわかる. したがって f の連続性により

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$$

なので

$$\mu \leq f(c).$$

ふたつの不等式をあわせて $f(c) = \mu$.

□

例題. 方程式 $2e^x - 6x = 0$ は $[-1, 1]$ に少なくともひとつ解を持つことを確かめよ.

解答. $f(x) = 2e^x - 6x$ とおくと $f(-1) = 2e^{-1} + 6 > 0$, $f(1) = 2e - 6 < 0$ である. ここで $e = 2.71828 \dots > 5/2$ なので $2e - 6 > 5 - 6 < 0$. したがって, 中間値の定理より $[-1, 1]$ に少なくともひとつ解をもつ.

^{*1} f は $x = c$ で連続なので任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して $|x - c| < \delta$ ならば $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ である. 一方 $a_n \rightarrow c$ なので $N = N(\delta) \geq 1$ が存在し $n \geq N$ ならば $|a_n - c| < \delta$ が成り立つ. したがって $|f(a_n) - f(c)| < \varepsilon$.

第7章 最大値・最小値の定理

最大値・最小値の定理

定理. 有界閉区間 $I = [a, b]$ とする. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ は I で連続であるとする. このとき I 上に f の最大値 $M = \max_{x \in I} f(x)$ と最小値 $m = \min_{x \in I} f(x)$ が存在する.

証明. Step 1:

まず $f(I)$ が有界であることを示す. $f(I)$ が有界でないと仮定すると, 各 $n \geq 1$ に対して

$$|f(a_n)| \geq n$$

を満たす点 $a_n \in [a, b]$ が存在する. $\{a_n\}$ は有界列なのでボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理により収束する部分列 $\{a_{n(k)}\}$ で

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = a_0 \quad (a_0 \in [a, b])$$

なるものを選べる.

$$|f(a_{n(k)})| \geq n(k)$$

において $k \rightarrow \infty$ とすると f の連続性により $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(a_{n(k)})| = |f(a_0)| < \infty$. 一方で $\lim_{k \rightarrow \infty} n(k) = \infty$ なので矛盾する.

Step 2:

Step 1 により

$$f(I) = \{f(x); x \in [a, b]\}$$

は有界である. したがって実数の連続性公理により, 上限, 下限が存在するので

$$M = \sup f(I) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m = \inf f(I) = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$$

とおく. 定理1により各 $n \geq 1$ に対して

$$M - \frac{1}{n} < b_n \leq M$$

なる $b_n \in f(I)$ が存在する. こうして数列 $\{b_n\} \subset f(I)$ が定まる. $b_n = f(a_n)$ をみ
 たす $a_n \in I$ として数列 $\{a_n\}$ が定まる. $\{a_n\}$ は有界列なのでボルツァノ・ワイエルシュ
 トラスの定理により, 収束する部分列 $\{a_{n(k)}\}$ を選べるので収束先 $a_0 \in [a, b]$ が存在し
 $a_{n(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a_0$ とできる. したがって

$$M - \frac{1}{n(k)} < f(a_{n(k)}) \leq M$$

なので $k \rightarrow \infty$ の極限をとると f の連続性により

$$M = f(a_0)$$

を得る. したがって $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. $\min$ についても同様である. □

例題. 関数 $f(x) = e^{2x} - 2e^{x-1/2} + 5$ ($x \in [-1, 1]$) の最大値・最小値を求めよ.

解答. 平方完成すると $f(x) = (e^x - e^{-1/2})^2 + 5 - e^{-1}$ とかける. $5 - e^{-1} > 0$ だから
 2 次の項

$$(e^x - e^{-1/2})^2 \geq 0$$

が 0 のとき最小値を取るので $x = -1/2$ のとき最小値 $f(-1/2) = 5 - 3/e$. 2 次の項

$$(e^x - e^{-1/2})^2 = e^x(e^x - 2e^{-1/2}) + e^{-1}$$

は $x = 1$ のとき最大値を取る所以 f の最大値も $x = 1$ において $f(1) = e^2 - 2e^{1/2} + 5$
 となる.

第8章 関数の一様連続性

一様連続性

$I \subset \mathbb{R}$ とする. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が I 上で一様連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう.

この定義のことを説明しよう. 一様連続性の定義において δ は ε にのみ依存するものを選択できるのである. その様な δ に対して δ 程度に離れた 2 点間 $x, y \in I$ に対してはいつも $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つ. もちろんわざわざ一様連続という概念を導入するのだから一様連続でない関数があるし, 一様連続性が議論の中で威力を発揮することもある.

一様連続性の特徴づけ

定理. $I \subset \mathbb{R}$ とする. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が一様連続であることの必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し

$$\sup_{(x,y) \in D_\delta} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことである. ここで $D_\delta = \{(x, y) \in I \times I; |x - y| < \delta\}$.

証明. (必要性) 一様連続であることを仮定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. すなわち任意の $(x, y) \in D_\delta$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. 左辺で $(x, y) \in D_\delta$ に関する上限をとると

$$\sup_{(x,y) \in D_\delta} |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(十分性) 逆に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し

$$\sup_{(x,y) \in D_\delta} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つとする. すると直ちに, 任意の $(x, y) \in D_\delta$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

がいえる. これと $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つということは同値なので一様連続性が示された. $\square$

次の例で確かめる様に, 最も易しい一様連続関数の例のひとつは一次関数である.

例. $I = \mathbb{R}$. $f(x) = x$ ($x \in I$) とすると f は一様連続である. 実際に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon > 0$ とすれば $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon.$$

2次関数は x の値が大きい場合, 少し離れると変動が大きくなる. だから $\mathbb{R}$ 全体では一様連続ではなさそうである. 同じ理由で指数関数も $\mathbb{R}$ 全体では一様連続ではなさそうである.

例. $I = \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ ($x \in I$) とすると f は一様連続でない. 実際に, もし一様連続だとすれば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x, y \in I$ に対して $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| < \varepsilon$ が成り立つ. このとき

$$K > \frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{\delta}{4}$$

に対して $x_0 = K$, $y_0 = K + \delta/2$ とおくと $|x_0 - y_0| < \delta$ であるが

$$|f(x_0) - f(y_0)| = K\delta + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon.$$

これは矛盾である. したがって一様連続でない.

例. $I = \mathbb{R}$. $f(x) = e^x$ ($x \in I$) とすると f は一様連続でない. 実際に, もし一様連続だとすれば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x, y \in I$ に対して $|f(x) - f(y)| = |e^x - e^y| < \varepsilon$ が成り立つ. このとき

$$K > \log \left(\frac{\varepsilon}{e^{\delta/2} - 1} \right)$$

に対して $x_0 = K$, $y_0 = K + \delta/2$ とおくと $|x_0 - y_0| < \delta$ であるが

$$|f(x_0) - f(y_0)| = e^K(e^{\delta/2} - 1) > \varepsilon.$$

これは矛盾である.

例. $I = [0, \infty)$. $f(x) = e^{-x}$ ($x \in I$) とすると f は一様連続である. 実際に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \eta < \min(1, \varepsilon)$ として $\delta = (1/2) \log(1/(1 - \eta)) > 0$ とすると $|x - y| < \delta$ をみたす任意の $x > y \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} |e^{-x} - e^{-y}| &= e^{-y} - e^{-x} \\ &= e^{-y}(1 - e^{-(x-y)}) \\ &\leq 1 - e^{-(x-y)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

例. 上の例から明らかに $f(x) = e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) も一様連続である.

定理. 閉区間 $I = [a, b]$ とする. 連続関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする. このとき f は I 上一様連続である.

証明. 結論を否定する. すなわち $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対して $|x - y| < \delta$ をみたす $x = x_\delta \in I$, $y = y_\delta \in I$ で

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

となるものが存在する. したがって $\delta = 1/n$ として数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $a_n = x_{1/n}$, $b_n = y_{1/n}$ と定義すれば, すべての $n \geq 1$ に対して

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$$

となる. $I = [a, b]$ は有界だからボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理により収束する部分列 $\{a_{n(k)}\}, \{b_{n(k)}\}$ が存在し

$$|a_{n(k)} - b_{n(k)}| < \frac{1}{n(k)}.$$

したがって $a_{n(k)} \rightarrow c$ ($k \rightarrow \infty$) であるとする

$$|b_{n(k)} - c| \leq |a_{n(k)} - b_{n(k)}| + |a_{n(k)} - c| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

なので $\{b_{n(k)}\}$ も同じ極限值 $c \in I$ に収束する. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は連続なので

$$f(a_{n(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(c)$$

と

$$f(b_{n(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(c)$$

が成り立つ. したがって

$$|f(a_{n(k)}) - f(b_{n(k)})| \leq |f(a_{n(k)}) - f(c)| + |f(c) - f(b_{n(k)})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

これは上の不等式

$$|f(a_{n(k)}) - f(b_{n(k)})| \geq \varepsilon$$

に矛盾する. □

例題. 関数 $f(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) とする. 任意の定数 $\delta > 0$ とする.

- (1) $x_n = n + \delta/3$, $y_n = n$ ($n \geq 1$) とする. このとき $|x_n - y_n| < \delta$ が成立する事を確かめよ.
- (2) $x_n = n + \delta/3$, $y_n = n$ ($n \geq 1$) に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \infty$ が成立する事を確かめよ.

解答. (1) $|x_n - y_n| = |n + \delta/3 - n| = \delta/3 < \delta$ である. よって確かめることが出来た.
(2)

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= \left| \left(n + \frac{\delta}{3} \right)^3 - n^3 \right| \\ &= \left| n^3 + \delta n^2 + \frac{\delta^2}{3} n + \frac{\delta^3}{27} - n^3 \right| \\ &= \delta n^2 + \frac{\delta^2}{3} n + \frac{\delta^3}{27} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

よって確かめることが出来た.

例題. 関数 $f(x) = 1/x$ ($x \in (0, \infty)$) とする. 任意の定数 $\delta > 0$ とする.

- (1) $x_n = 1/n + \delta/4$, $y_n = 1/n$ ($n \geq 1$) とする. このとき $|x_n - y_n| < \delta$ が成立する事確かめよ.
- (2) $x_n = 1/n + \delta/4$, $y_n = 1/n$ ($n \geq 1$) に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \infty$ が成立する事確かめよ.

解答. (1) $|x_n - y_n| = |1/n + \delta/4 - 1/n| = \delta/4 < \delta$ である. よって確かめることが出来た.
(2)

$$\begin{aligned}
 |f(x_n) - f(y_n)| &= \left| \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{\delta}{4}} - n \right| \\
 &= n - \frac{4n}{n\delta + 4} \\
 &= \frac{n^2\delta}{n\delta + 4} \\
 &\geq \frac{n^2\delta}{n\delta + 4n} \\
 &= \frac{n\delta}{\delta + 4} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.
 \end{aligned}$$

よって確かめることが出来た.

第9章 微分法と平均値定理

微分係数・導関数

微分係数

开区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする. 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ について次の極限值が確定するとき, それを $a \in I$ における微分係数といい $f'(a)$ とかく.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

また微分係数が確定するとき微分可能であるという. f が I のすべての点 $a \in I$ において微分可能とき f は I 上で微分可能であるという.

導関数

开区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能であるとする. $x \in I$ に対して微分係数の値 $f'(x)$ を対応させる関数, すなわち $x \mapsto f'(x)$ を導関数といい f' とかく.

$f' = \frac{df}{dx}$ とかくこともある.

微分可能な関数の連続性と四則演算

微分可能ならば連続

定理. 开区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は $a \in I$ において微分可能であるとする. このとき $a \in I$ において連続である.

証明.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) &\iff \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \\ &\iff \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \end{aligned}$$

なので, $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$ を示せば良いことがわかる. いま微分可能であることを仮定すると

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

これで主張が示された.

□

微分と四則演算 $(+, -, \times, \div)$

定理. $I \subset \mathbb{R}$ とする. 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ と $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ は I 上で微分可能であるとする. このとき以下の (1) ~ (3) の関数も I 上で微分可能で以下の等式がなりたつ.

$$(1) (c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g' \text{ ただし } c_1, c_2 \text{ は定数}$$

$$(2) (fg)' = f'g + fg'$$

$$(3) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ ただし } g(x) \neq 0 \text{ の場合}$$

証明. ここでは証明を省略する.

□

ロルの定理

平均値定理とテイラーの定理は次のロルの定理から導かれるものである. したがって微分法において最も重要な定理のひとつである.

ロルの定理

定理. $I = [a, b]$ とする. 連続関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は开区間 (a, b) で微分可能であるとする. $f(a) = f(b)$ が成り立つとする. このとき $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = 0$$

が成り立つ.

証明. f が定数のとき定理は明らかである. f は定数でないとする. f は有界閉区間上の連続関数なので最大値と最小値をとる. いま f は定数でないので

$$f(x) > f(a) = f(b)$$

となる $x \in (a, b)$ があると仮定する. $c \in (a, b)$ で最大値をとるとする. このとき

$$f(c) > f(a) = f(b)$$

となる. $f(c)$ が最大値なので $|h| > 0$ を十分小さくとると

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad (h > 0)$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad (h < 0)$$

となる. これらの不等式について $h \rightarrow 0$ の極限をとることにより

$$\begin{aligned} f'_+(c) &\leq 0, \\ f'_-(c) &\geq 0 \end{aligned}$$

を得る. f は c で微分可能なので $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$ である. したがって $f'(c) = 0$ を得る. 最初の仮定で

$$f(x) < f(a) = f(b)$$

となる $x \in (a, b)$ があると仮定する場合も同様である. □

平均値定理

平均値定理

定理. $I = [a, b]$ とする. 連続関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ は (a, b) において微分可能であるとする. このとき, $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ.

$f(a) = f(b)$ の場合はロルの定理として知られる. この定理は次のコーシーの平均値定理の特別な場合なのでコーシーの平均値定理に証明を与えれば十分である.

コーシーの平均値定理

定理. $I = [a, b]$ とする. 連続関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ は開区間 (a, b) で微分可能であるとする. このとき $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$) ならば $c \in (a, b)$ が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成り立つ.

証明. 関数

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \end{pmatrix} \quad (x \in [a, b])$$

と定義する. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で (a, b) で微分可能であり $F(a) = F(b) = 0$ である. ロルの定理の仮定を満たしているので $c \in (a, b)$ が存在して $F'(c) = 0$ を満たす.

$$F' = \det \begin{pmatrix} f' & g' & 0 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

となる.

□

$g(x) = x$ の場合が通常の意味である.

—— 平均値定理の意味 ——

一般の関数 f のグラフの接線は $[a, b]$ の範囲で $x_0 \in [a, b]$ によって異なる傾きの値 $f'(x_0)$ をとる. ところが x が a から b に増加した時の $y = f(x)$ の変化の割合は

$$L = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となっていて, $[a, b]$ の範囲では平均で L を傾きとして持っていることになる. 平均値定理は微分係数が L に一致する点 $c \in (a, b)$ が存在するということを言っている.

例題. 区間 $I = [2, 5]$ とする. 関数 $f(x) = e^{2x}$ ($x \in I$) について平均値定理における c の値を区間 I の内部で求めよ.

解答. 平均値定理より問題文の $c \in (2, 5)$ に対して

$$2e^{2c} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{e^{10} - e^4}{3}$$

が成り立つ. したがって

$$e^{2c} = \frac{e^{10} - e^4}{6}.$$

両辺の自然対数を取ると

$$2c = \log \left(\frac{e^{10} - e^4}{6} \right).$$

よって

$$c = \log \sqrt{\frac{e^{10} - e^4}{6}}$$

となる^a.

^a余裕があれば PC か関数電卓で $c \in (2, 5)$ であることを確かめておくと良い. これはそうになっている.

逆関数の微分法と合成関数の微分法について

この資料では、微分の定義や平均値定理など理論的なことを改めて考察することを目的としているので逆関数の微分法と合成関数の微分法の公式については触れない。しかし使い方は知っているはずだから今後、使って構わない。

第10章 テイラーの定理

関数 f が n 回微分可能で n 階導関数が連続であるとき f は n 回連続微分可能であるという。関数 f が任意の $k \geq 1$ に対して k 回微分可能なとき f は無限回微分可能であるという。

テイラーの定理（ラグランジュの剰余）

定理. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[a, b]$ で $n-1$ 階連続微分可能で (a, b) で n 階微分可能とする。このとき、 $c \in (a, b)$ が存在して以下の等式が成り立つ

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c).$$

証明.

$$K = \frac{1}{(b-a)^n} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right)$$

とおき関数 F を以下の様に定義する。

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - K(b-x)^n \quad (x \in [a, b]).$$

F は $[a, b]$ 上の連続関数である。このとき K の定義の仕方から

$$F(a) = F(b) = 0.$$

また F は (a, b) で微分可能であるからロルの定理により $c \in (a, b)$ が存在し $F'(c) = 0$ となる。

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + nK(b-x)^{n-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{l=0}^{n-2} \frac{f^{(l+1)}(x)}{l!} (b-x)^l + nK(b-x)^{n-1} \\ &= - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + nK(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

なので

$$-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + nK(b-c)^{n-1} = 0$$

が成り立つ. これにより

$$K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

となる. また $c \in (a, b)$ に対して $\theta \in (0, 1)$ が存在し $c = a + \theta(b-a)$ と表すことができる. $\square$

最後の $n+1$ 番目の項

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

をラグランジュの剰余項という. f が無限回微分可能で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) = 0$$

が成り立つとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(b) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) = 0$$

となるのでテイラー展開

$$f(b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

を得る.

例 (e^x のテイラー展開). $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ のテイラー展開を $b = x$, $a = 0$ として求めてみよう.

以下の議論では $x \in \mathbb{R}$ は固定して考える. $f^{(j)}(x) = e^x$, $f^{(j)}(0) = 1$ なので

$$e^x = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} + \frac{x^n}{n!} e^c$$

となる $c = c_x \in (0, x)$ が存在する. $\left| \frac{x^n e^c}{n!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^x$ となっていて $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} e^x = 0$ が成り立つことが知られているので

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

となる.

テイラー展開可能でない関数

どんな関数でもテイラー展開できるわけではない．無限回微分可能であってもテイラー展開可能でない関数がある．実際に，関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

はその様な関数の例である．なぜなら，任意の $k \geq 1$ に対して $f^{(k)}(0) = 0$ が成り立つことがわかるが， f がテイラー展開可能であるとする $x > 0$ に対して

$$e^{-1/x} = f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) = 0$$

となる．このことは $e^{-1/x} > 0$ であることに矛盾する．したがってテイラー展開可能でない．

平均値定理

平均値定理はテイラーの定理の $n = 1$ の場合である．すなわちテイラーの定理は平均値定理を $n \geq 2$ に拡張したものとも見ることもできる．

テイラーの定理の $n = 1$ の場合

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする．このとき， $c \in (a, b)$ が存在して以下の等式が成り立つ

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

この式を変形して前の章の平均値定理において紹介した式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を得る．平均値定理は関数の 1 次近似（1 次関数による近似）になっている．テイラーの定理とはより高次（ n 次）の多項式による f の近似である．

例題. 区間 $I = [2, 5]$ とする. 関数 $f(x) = e^{2x}$ ($x \in I$) について $n = 3$ の場合のテイラーの定理における c の値を区間 I の内部で求めよ.

解答. $n = 3$ の場合のテイラーの定理より問題文の $c \in (2, 5)$ に対して

$$f(5) = f(2) + f'(2)(5-2) + \frac{f^{(2)}(2)}{2!}(5-2)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(5-2)^3$$

が成り立つ. $f'(x) = 2e^{2x}$, $f^{(2)}(x) = 4e^{2x}$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x}$ なので上の式に当てはめると

$$e^{10} = e^4 + 6e^4 + 18e^4 + 36e^{2c} = 25e^4 + 36e^{2c}$$

を得る. よって

$$e^{2c} = \frac{e^{10} - 25e^4}{36}.$$

両辺の自然対数を取ると

$$2c = \log \left(\frac{e^{10} - 25e^4}{36} \right).$$

よって

$$c = \log \left(\frac{e^2 \sqrt{e^6 - 25}}{6} \right)$$

となる^a.

^a余裕があればPCか関数電卓で $c \in (2, 5)$ であることを確かめておくと良い. これはそうになっている.

第11章 定積分

定積分（リーマン積分）の定義

区間 $I = [a, b]$ における定積分（リーマン積分）の定義を与えよう．まず数直線上の範囲 $I = [a, b]$ を n 分割する．この分割は必ずしも n 等分とは限らない．これを分割 Δ_n と表す

$$\Delta_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \quad (\text{区間の } n \text{ 分割})$$

(長方形の面積) = (底辺の長さ) $\times$ (高さ) であることを思い出そう．このとき分割された小さな各区間について $x_j - x_{j-1}$ を底辺の長さ, 高さを $f(\xi_j)$ とした長方形の面積を全て足し合わせると

$$R(\xi; \Delta_n) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

ここで代表点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ とした． $R(\xi; \Delta_n)$ は f のグラフの下の面積を近似したものである^a．分割の大きさ $|\Delta_n|$ を

$$|\Delta_n| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

と定義する^b．ある定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ として, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|\Delta_n| < \delta$ ならば任意の $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ に対して

$$|R(\xi; \Delta_n) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき f は積分可能であるという．このとき定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を定積分といい

$$\alpha = \int_a^b f(x)dx$$

と表す．

^aここでは簡単のためグラフは正の値をとるものとして描かれていると考える．

^b n 分割において $n \rightarrow \infty$ のときにいつも $|\Delta_n| \rightarrow 0$ とは限らない． $[0, 1]$ を $x_0 = 0, x_1 = 1/2$ とし $[1/2, 1]$ の部分だけ $1/2 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ とし $n \rightarrow \infty$ に伴って細かく分割する仕方にも含まれるからである．しかし $|\Delta_n| \rightarrow 0$ のときは $n \rightarrow \infty$ である．実際に $n|\Delta_n| \geq b - a$ なので任意の $M > 0$ に対して $\delta = (b - a)/2M > 0$ とすると $|\Delta_n| < \delta$ のとき $n \geq (b - a)/|\Delta_n| > 2M > M$ が成り立つ．

この定義で注意したいのは $|\Delta_n| < \delta$ なる分割が先に決まって、その後に代表点 $\xi, \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ が選ばれている事である。この極限操作の中身をきちんと理解するには ε - δ 方式が本質的に役に立つであろう。 ε - δ 方式では登場する文字の決まる順番や何に依存するかが重要であって一度決まれば極限操作の対象となる文字は固定される。

定積分の性質

定理. 区間 $I = [a, b]$ 上の関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

- (1) f, g が積分可能なとき, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1 f + c_2 g$ も積分可能で

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つ。このような性質を線形性という。

- (2) f が積分可能なとき

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

- (3) f と $|f|$ が積分可能なとき

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

証明. (1)

$$\sum_{j=1}^n (c_1 f(\xi_j) + c_2 g(\xi_j)) (x_j - x_{j-1}) = c_1 \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) + c_2 \sum_{j=1}^n g(\xi_j) (x_j - x_{j-1})$$

である。右辺の極限值が存在するので左辺も極限值が存在する。すなわち $c_1 f + c_2 g$ が積分可能。両辺で $|\Delta_n| \rightarrow 0$ の極限をとると求める式を得る。

- (2) 分割 Δ_n を

$$\begin{aligned} \Delta_{1,n} &= a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c, \\ \Delta_{2,n} &= c = x_{k+1} < x_{n+2} < \cdots < x_n = b \end{aligned}$$

とふたつに分けると

$$R(\xi; \Delta_n) = R(\xi; \Delta_{1,n}) + R(\xi; \Delta_{2,n})$$

である。両辺で $|\Delta_n| \rightarrow 0$ の極限をとると求める式を得る。

- (3) 三角不等式によって以下を得る。

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| (x_j - x_{j-1}).$$

両辺で $|\Delta_n| \rightarrow 0$ の極限をとると求める不等式を得る.

□

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

と約束する.

※ 関数の積 ($\times$) や商 ($\div$) の積分に関する簡単な法則はない.

例. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

と定義する. 分割 Δ_n とする. 有理数の稠密性^aによりどの様に分割した小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ においても有理数が含まれているので各小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ から有理数のみ取り出した代表点 ξ_1 を考えると $R(\xi_1; \Delta_n) = b - a$ となる. 一方で無理数の稠密性により各小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ から無理数のみ取り出した代表点 ξ_2 を考えると $R(\xi_2; \Delta_n) = 0$ なので f は積分可能でない.

^a実数において有理数と無理数は稠密である. すなわち数直線上で好きに選んだ点の任意に近いところに無理数と有理数が存在している. だからどの様に分割してもその小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ の中に有理数と無理数が存在する.

この例の様に必ずしもすべての関数に対してリーマン積分は存在するものではないが次のことが言える.

積分可能であるための十分条件

定理. 有界閉区間 $I = [a, b]$ とする. 連続関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ は I で積分可能である.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ とする. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ は一様連続なので $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ が存在し $|x - y| < \delta_1$ ($x, y \in I$) ならば

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

が成り立つ. 分割

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

を $|\Delta_n| < \delta_1$ をみたすように選ぶと $|x_j - x_{j-1}| < \delta_1$ が成り立つ. 各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ において最大値, 最小値が存在するので

$$M_j = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \quad m_j = \min_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

とおくと、一様連続性により

$$0 < M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成り立つ. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (n \geq 1),$$

$$b_n = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \quad (n \geq 1)$$

と定めると $a_n \leq b_n$ ($n \geq 1$) であり $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列, $\{b_n\}$ は下に有界な単調減少列なので^{*1}, それぞれ収束先

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \sup_{n \geq 1} a_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta = \inf_{n \geq 1} b_n$$

をもち

$$0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$$

が成り立つ^{*2}. したがって $\alpha = \beta$ を得る. 一方で任意の $n \geq 1$ に対して

$$a_n \leq R(\xi; \Delta_n) \leq b_n$$

が $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ の選び方によらず成り立つ. $n \rightarrow \infty$ のとき左辺と右辺は α に収束するので, $N = N(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n \geq N$ のとき

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ. $\delta_2 = \delta_2(N) > 0$ が存在し $|\Delta_n| < \delta_2$ のとき $n \geq N$ となる. $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ とおくと $|\Delta_n| < \delta$ ならば $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ の選び方によらず

$$\alpha - \varepsilon < R(\xi; \Delta_n) < \alpha + \varepsilon$$

となる. このことは f が積分可能であり

$$\alpha = \int_a^b f(x) dx$$

であることを意味する. □

^{*1}理由は $[a_{j-1}, a_j]$ をさらに分割したとき m_j の値は単調増加して新しい分割に適応し, M_j の値は単調減少して新しい分割に適応するからである.

^{*2} $a_n \leq b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき $\alpha \leq \beta$ であったことを思い出そう.

積分の平均値定理

定理. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき $c \in (a, b)$ が存在して以下の等式が成り立つ

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

証明. f は有界閉区間上の連続関数であるから $\alpha, \beta \in I$ が存在し

$$M = \max_{x \in I} f(x) = f(\alpha), \quad m = \min_{x \in I} f(x) = f(\beta)$$

が成り立つ. ここで $M = m$ のときは f を定数関数として定理が成り立つので $M > m$ とする. また $\alpha < \beta$ とする. このとき中間値の定理により $c' \in (\alpha, \beta)$ が存在し

$$m < f(c') < M$$

が成り立つ. したがって $\delta > 0$ が存在し $x \in (c' - \delta, c' + \delta)$ に対して

$$m < f(x) < M$$

が成り立つので^{*3}

$$m \int_a^b dx < \int_a^b f(x) dx < M \int_a^b dx$$

となり

$$f(\beta) = m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M = f(\alpha).$$

したがって中間値の定理により $c \in (\alpha, \beta)$ が存在し

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つ. $\alpha > \beta$ と仮定した場合も同様である. □

積分の平均値定理の意味

上の式を書き換えると

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

となる. 左辺は底辺の長さが $b-a$ で高さが $f(c)$ の長方形の面積である. 右辺は $f(x)$ が正の値を取ることにすればそのグラフに囲まれた部分の面積である. すなわち平均の高さ $f(c)$ とする長方形の面積と長方形よりも複雑な形をしたグラフの面積が等しくなるということである.

^{*3}関数 $g = M - f$, $h = f - m$ とおくと連続であり $g(c') > 0$, $h(c') > 0$ であるから $x \in (c' - \delta, c' + \delta)$ に対して $g(x) > 0$, $h(x) > 0$.

例題. 区間 $I = [0, \pi/2]$ とする. 関数 $f(x) = \cos x$ ($x \in I$) について積分の平均値定理における c の値を区間 I の内部で求めよ.

解答. 積分の平均値定理より問題文の $c \in (0, \pi/2)$ に対して

$$f(c) = \frac{1}{\pi/2 - 0} \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

が成り立つ. したがって

$$\cos c = \frac{2}{\pi} [\sin x]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

両辺の $\cos^{-1}$ を取ると

$$c = \cos^{-1} \left(\frac{2}{\pi} \right)$$

となる^a.

^a $2/\pi \in [-1, 1]$, $c \in (0, \pi/2)$ である.

第12章 微分積分学の基本定理と広義積分

原始関数

$F' = f$ となる関数 F を関数 f の原始関数という.

微分積分学の基本定理

定理. $I = [a, b]$ とする. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) 定積分は次の様に計算できる.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ここで, 原始関数 $F' = f$.

(2) 定数 $\alpha \in I$ とする. このとき $G_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ ($x \in I$) とおくと

$$G'_\alpha(x) = f(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $|\Delta_n| < \delta$ ならば任意の $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ に対して

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

一方で F は微分可能なので連続であるから平均値定理の仮定をみたすので

$$\frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f(c_j)$$

をみたす $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ が存在する. $\xi_j = c_j$ に対しても上の式は成立するから, 上の式

に c_j を代入すると

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(c_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ &= \left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) $x_0 \in (a, b)$ を固定する. $0 < h < \min(b - x_0, x_0 - a)$ とする. このとき (1) より

$$G_\alpha(x_0 + h) - G_\alpha(x_0) = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

なので

$$G'_\alpha(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_\alpha(x_0 + h) - G_\alpha(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

$x_0 = a, b$ の場合も同様.

□

例題 (微分積分学の基本定理を用いる例題). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする.

$$g(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt \quad (x \in [a, b])$$

と定義する. 微分積分学の基本定理の (1) を応用して導関数 g' と g'' を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_a^x (x-t)f(t)dt \\ &= x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt \right)' \\ &= \left(x \int_a^x f(t)dt \right)' - \left(\int_a^x tf(t)dt \right)' \\ &= x' \int_a^x f(t)dt + x \left(\int_a^x f(t)dt \right)' - \left(\int_a^x tf(t)dt \right)' \quad (\text{積の微分法}) \\ &= \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) \quad (\text{微分積分学の基本定理の (2)}) \\ &= \int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

$$g''(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

置換積分と部分積分について —

この資料では、積分の定義や微分積分学の基本定理など理論的なことを改めて考察することを目的としているので置換積分と部分積分の公式については触れない. しかし使い方は知っているはずだから今後、使って構わない.

特異積分

積分とは関数のグラフと x 軸の囲む図形の面積の値を計算することに相当するものである。関数のとる値が高さに相当していて、積分区間の長さが底辺の長さに相当している。これまでは高さや底辺の長さが有限の値となる場合を考えてきた。ここでは高さや底辺の長さが無限大となる様な場合の図形の面積の値を求める方法を紹介する。それらの面積の値は必ずしも無限大とはならないのである。

広義積分（特異積分）の定義

$f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

が収束するときに広義積分可能といい、特異点を含む広義積分は以下の式で与えられる：

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

特異点を含む広義積分の求め方

f が $(a, b]$ で定義されていて a を特異点とするとき。

Step 1

定義域からはみ出さない様に特異点の右側 $+\epsilon$ の範囲で積分

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

を求める。

Step 2

極限值

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

が存在するか考える。

Step 3

存在すればその極限值が広義積分の値である。存在しなければ広義積分は存在しない。

重要な広義積分 1 $\alpha > 0$ として関数

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (x \in (0, 1])$$

の広義積分を考えてみよう. この広義積分は $f(x)$ のグラフと x 軸の囲む無限の範囲を持つ図形の面積に対応していることに注意しよう. この場合では $x = 0$ の近くで高さが無限に高くなる図形なのである.

1. $0 < \alpha < 1$ の場合

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_{\epsilon}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

$1 - \alpha > 0$ なので広義積分は存在し

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2. $\alpha = 1$ の場合

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_{\epsilon}^1 = -\log \epsilon$$

であるが

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (-\log \epsilon) = \infty$$

なので広義積分は存在しない.

3. $\alpha > 1$ の場合

$0 < \alpha < 1$ のときと同様に

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

であるが

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \infty$$

なので広義積分は存在しない.

広義積分（特異積分）から言えること

関数

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \quad (x \in (0, 1])$$

のグラフが表す図形の面積は上の結果から

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = 2$$

である。このグラフが表す図形は高さが無限大の図形であるにも関わらず、高さと底辺の長さが3の三角形の面積

$$\int_0^3 x dx = \frac{9}{2}$$

よりも面積の値が小さいのである。

無限積分

これまでは積分の範囲の上端 b と下端 a は有限の数であった。これが $b = \infty$ や $a = -\infty$ も含む場合の積分である広義積分（無限積分と呼ぶこともある）を考える。

広義積分（無限積分）の定義

$f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

が収束するときに広義積分可能といい、広義積分は以下の式で与えられる：

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx.$$

無限区間における広義積分の求め方

f が $[a, \infty)$ で定義されているとき.

Step 1

積分範囲の上端を有限の値に止めて積分

$$\int_a^R f(x) dx$$

を求める.

Step 2

極限值

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

が存在するか考える.

Step 3

存在すればその極限值が広義積分の値である. 存在しなければ広義積分は存在しない.

重要な広義積分 2 $\alpha > 0$ として関数

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (x \in [1, \infty))$$

の広義積分を考えてみよう. この広義積分は $f(x)$ のグラフと x 軸の囲む無限の範囲を持つ図形の面積に対応していることに注意しよう. この場合では底辺の長さが無限の長さを持つ図形なのである.

1. $0 < \alpha < 1$ の場合

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^R = \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

である. $1-\alpha > 0$ なので

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$$

となり広義積分は存在しない.

2. $\alpha = 1$ の場合

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^R = \log R$$

であるが

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \log R = \infty$$

なので広義積分は存在しない.

3. $\alpha > 1$ の場合

$0 < \alpha < 1$ のときと同様に

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

であるが $1 - \alpha < 0$ なので

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0.$$

したがって広義積分は存在し

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

広義積分（無限積分）から言えること

関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1, \infty))$$

のグラフが表す図形の面積は上の結果から

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$

である. このグラフが表す図形は無限に長い底辺を持つ図形であるにも関わらず, 高さ
と底辺の長さが2の三角形の面積

$$\int_0^2 x dx = 2$$

よりも面積の値が小さいのである.

コーシーの収束条件

定理. 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1) 連続関数 $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は $\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x)| = \infty$ を満たすとする.

$$\int_a^b f(x) dx$$

が収束するための必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $a < \delta_1 < \delta_2 \leq a + \delta$ なる任意の δ_1, δ_2 に対して

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

- (2) 有界な連続関数とする $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

が収束するための必要十分条件は任意の $\varepsilon > 0$ に対して $L = L(\varepsilon) > 0$ が存在し $L < r < R$ なる任意の $r, R > 0$ に対して

$$\left| \int_r^R f(x) dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

証明. 必要性は明らかである.

(十分性) 任意の $\varepsilon > 0$ とする. 仮定により $\eta = \varepsilon/4$ に対して $\delta = \delta(\eta) > 0$ が存在し $a < \delta_1 < \delta_2 \leq a + \delta$ なる任意の δ_1, δ_2 に対して

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| < \eta$$

が成り立つ.

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt, \quad x \in (a, b)$$

とする. $x_0 = a + \delta$ とおく.

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) - (F(x_0) - F(x)) \\ &= F(x_0) - \int_{a+\delta}^x f(t) dt \\ &= F(x_0) + \int_x^{a+\delta} f(t) dt \end{aligned}$$

とかけるので $a < x < x_0$ に対して

$$F(x_0) - \eta < F(x) < F(x_0) + \eta$$

となり有界である. 任意の $a < x < x_0$ に対して

$$g(x) = \sup_{a < t \leq x} F(t), \quad h(x) = \inf_{a < t \leq x} F(t)$$

とおくと

$$|g(x) - h(x)| \leq 2\eta < \varepsilon$$

である. このことは

$$\lim_{x \rightarrow a+0} |g(x) - h(x)| = 0$$

を意味する. また g は単調増加関数なので

$$\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \alpha$$

が存在する. 実際に g に下限

$$\alpha = \inf_{x \in (a, x_0)} g(x)$$

が存在するので, 任意の $\eta > 0$ に対して $\gamma = \gamma(\eta) > 0$ で $\gamma < x_0 - a$ なるものが存在し $x_* = a + \gamma$ に対して

$$\alpha \leq g(x_*) < \alpha + \eta$$

となる. したがって任意の $x \in (a, a + \gamma)$ に対して

$$-\eta < g(x) - \alpha < \eta.$$

このことは

$$\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \alpha$$

を意味する. 同様に

$$\lim_{x \rightarrow a+0} h(x) = \alpha$$

であることが確かめられる.

$$h(x) \leq F(x) \leq g(x) \quad (x \in (a, x_0))$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = \alpha$$

となる. (2) も同様.

□

この定理により連続関数 f の広義積分可能性を示すには $|f| \leq g$ をみたす広義積分可能な g の存在を示してやれば十分である。

例. $a > 0$ に対して広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} dx$$

は収束する. 実際に

$$\begin{aligned} \lim_{R, R' \rightarrow \infty} \int_{-R'}^R e^{-a|x|} dx &= \lim_{R, R' \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-ax} dx + \int_{-R'}^0 e^{-a|x|} dx \right) \\ &= \lim_{R, R' \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-ax} dx + \int_{-R'}^0 e^{ax} dx \right) \\ &= \lim_{R, R' \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{1}{-a} e^{-ax} \right]_0^R + \left[\frac{1}{a} e^{ax} \right]_{-R'}^0 \right) \\ &= \lim_{R, R' \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} (1 - e^{-aR}) + \frac{1}{a} (1 - e^{-aR'}) \right) \\ &= \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

したがって収束しその値は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} dx = \frac{2}{a}.$$

例. 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

は収束する. 実際に

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

とすると f は $\mathbb{R}$ で連続である. したがって

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

なので原点の近傍で広義積分可能である. 次に無限遠方で広義積分可能であるか確かめる. $R > r > 1$ とすると

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx &= \int_r^R \frac{-(\cos x)'}{x} dx \\ &= \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_r^R - \int_r^R \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &\xrightarrow{R > r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

となる. したがって広義積分可能であることがいえる. ここでは証明をしないが実は上の広義積分の値は $\pi/2$ であることが知られている. それはフーリエ解析や複素解析を応用して証明することができる.

参考文献

- [1] 杉浦 光夫
解析入門 I
東京大学出版会
- [2] 鈴木 武, 山田 義雄, 柴田 良弘, 田中 和永 共著
微分積分学 I
内田老鶴圃
- [3] 高木 貞治
解析概論
岩波書店
- [4] 難波 誠
微分積分学
裳華房
- [5] 福井 常孝, 上村 外茂男, 入江 昭二, 宮寺 功, 前原 昭二, 境 正一郎 共著
解析学入門
内田老鶴圃