大学院 数学解析特論B
フーリエ解析
(Fourier Analysis)
参考資料

作成者[*1]：星埜 岳

[*1]数式組版ソフト LaTeX による作成

目 次

第I部

フーリエ級数

第1章　フーリエ級数の導入とディリクレ核

フーリエ級数

フーリエ級数の目的は 2π 周期関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の三角関数による展開

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$$

に関することを考察することである．この展開式のことをフーリエ級数という．複雑な関数を性質のよく知られた三角関数で近似できないだろうかという疑問がフーリエ級数を考えるに至る動機といえるであろう．オイラーの公式

$$e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx)$$

により

$$\cos(kx)=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2},\quad \sin(kx)=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$$

であるから，これを上のフーリエ級数の式に代入して，極限のもとにある各項が収束するものとして計算すると

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{ikx}\frac{a_k-ib_k}{2}+e^{-ikx}\frac{a_k+ib_k}{2}\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikx}\frac{a_k-ib_k}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ikx}\frac{a_k+ib_k}{2}\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikx}\frac{a_k-ib_k}{2}+\sum_{k=-\infty}^{-1}e^{ikx}\frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}\end{aligned}$$

とかき変わるので

$$c_k=\begin{cases}\dfrac{a_k-ib_k}{2} & (k\geq 1)\\ \dfrac{a_{-k}+ib_{-k}}{2} & (k\leq -1)\\ \dfrac{a_0}{2} & (k=0)\end{cases}$$

と定義すると

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$$

と表せる．クロネッカーのデルタ

$$\delta(k,l)=\begin{cases}1 & (k=l)\\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

を導入すると

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-l)x}dx=\delta(k,l)$$

であることがわかる．f はフーリエ級数に展開できるものとする．すなわち

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$$

が成り立つものとする．さらに項別積分が可能であるとして計算をすると

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ilx}dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\right)e^{-ilx}dx\\&=2\pi c_l\end{aligned}$$

を得る．これらをもとにフーリエ係数が導入される．

フーリエ係数

積分可能な周期 2π の複素数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して

$$\widehat{f}(k)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}f(x)dx\quad(k\in\mathbb{Z})$$

で定義される写像 $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ をフーリエ変換という．文献によっては $\widehat{f}$ または $\widehat{f}(k)$ をフーリエ係数と呼ぶ場合もある．

フーリエ変換を用いて f のフーリエ級数は

$$S[f](x)=(2\pi)^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}\widehat{f}(k)\quad(x\in\mathbb{R})$$

と表される．ただしこの級数はまだ収束するかわからないことに注意．

フーリエ級数を考える上での問題点

数学的にきちんとフーリエ級数を考察する上では少なくとも以下の様な問題点が考えられるであろう.

- フーリエ級数は収束するのか.
- 収束する場合は何に収束するのか.
- 収束する場合はどの様な意味で収束するのか.

区分的に連続

このあとフーリエ級数の収束について論じていくのであるが定理を述べるために用いる用語を紹介する.

有界閉区間における関数 $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ が区分的に連続であるとは高々有限個の点

$$a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_n \leq b$$

において不連続であるが, 各区間 (c_i, c_{i+1}), $1 \leq i \leq n$ において連続で各 $1 \leq i \leq n$ に対して片側極限 $\lim_{x \to c_i + 0} f(x)$ と $\lim_{x \to c_i - 0} f(x)$ が存在することをいう.

区分的に連続な関数の導関数が区分的に連続なとき区分的に C^1 であるという.

例 1. $f(x) = x$ $(x \in [-\pi, \pi))$ で与えられる 2π 周期関数は区分的に連続である. また導関数も区分的に連続なので区分的に C^1 である. この例を理解するにはグラフをかいてみることをお勧めする.

例 2. $f(x) = |x|$ $(x \in [-\pi, \pi])$ で与えられる 2π 周期関数は区分的に C^1 である. 実は連続である.

例 3. $f(x) = x^2$ $(x \in [-\pi, \pi])$ で与えられる 2π 周期関数は区分的に C^1 である. 実は連続である.

例 4. 指数関数の定義域を局所的に制限しこれを 2π 周期で $\mathbb{R}$ 全体に拡張した $f(x) = e^x$ $(x \in [-\pi, \pi))$ によって与えられる 2π 周期関数は区分的に C^1 である.

ディリクレ核

f に対してフーリエ級数の部分和 $\{S_N[f]\}_{N=1}^{\infty}$ を

$$S_N[f](x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \widehat{f}(k) \quad (x \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N})$$

と定義する.

$N \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_N(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

により定まる D_N をディリクレ核という.

補題 1. $N \in \mathbb{N}$ とする. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π の区分的に連続な関数であるとする. このとき, ディリクレ核を用いると部分和は

$$S_N[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

と表すことができる.

証明. 以下の様に計算できる.

$$\begin{aligned} S_N[f](x) &= (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y) dy e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy. \end{aligned}$$

ここで周期 2π の関数 g について

$$\begin{aligned}\int_{a-\pi}^{a+\pi} g(x)dx &= \int_{a-\pi}^{\pi} g(x)dx + \int_{\pi}^{a+\pi} g(x)dx \\ &= \int_{a-\pi}^{\pi} g(x)dx + \int_{-\pi}^{a-\pi} g(2\pi+t)dt \quad (x = 2\pi + t \text{ と置換した}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \quad (g \text{ の周期性を用いた})\end{aligned}$$

が成り立つことを用いた. □

補題 2. $N \in \mathbb{N}$ とする.

$$D_N(x) = (2\pi)^{-1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. とくに D_N は偶関数である.

証明. 和の範囲を

$$\sum_{k=-N}^{N} = \sum_{k=-N}^{-1} + \sum_{k=0} + \sum_{k=1}^{N}$$

と分割できるので

$$\begin{aligned}D_N(x) &= (2\pi)^{-1}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-1}\left(\sum_{k=-N}^{-1} + \sum_{k=0} + \sum_{k=1}^{N}\right)e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-1}\left(1 + \left(\sum_{k=-N}^{-1} + \sum_{k=1}^{N}\right)e^{ikx}\right) \\ &= (2\pi)^{-1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)\right).\end{aligned}$$

ここで変数変換により得られる式

$$\sum_{k=-N}^{-1} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{N} e^{-ikx}$$

とオイラーの公式より得られる式

$$\sum_{k=1}^{N}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = 2\sum_{k=1}^{N}\cos(kx).$$

を用いた. □

補題 3. $N \in \mathbb{N}$ とする．

$$D_N(x) = (2\pi)^{-1} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \quad (x \neq 0)$$

が成り立つ．

証明. オイラーの公式と等比級数の和の公式

$$\sum_{k=0}^{N} r^k = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

を適宜用いて計算すると

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= (2\pi)^{-1} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \\
&= (2\pi)^{-1} \left(e^{-iNx} + e^{-i(N-1)x} + \cdots + 1 + \cdots + e^{iNx} \right) \\
&= (2\pi)^{-1} e^{-iNx} \left(1 + e^{ix} + \cdots + e^{iNx} + \cdots + e^{i2Nx} \right) \\
&= (2\pi)^{-1} e^{-iNx} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= (2\pi)^{-1} e^{-iNx} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \cdot \frac{e^{-ix/2}}{e^{-ix/2}} \\
&= (2\pi)^{-1} \frac{e^{-i(N+1/2)x} - e^{i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\
&= (2\pi)^{-1} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

□

第2章　L^2最良近似

区間 $[-\pi,\pi]$ 上の二乗可積分関数の空間は

$$L^2(-\pi,\pi)=\left\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C};\ \|f\|_{L^2}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty\right\}$$

と定義される. $L^2(-\pi,\pi)$ を L^2 とかくことがある.

L^2 内積は

$$(f,g)_{L^2}=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義される.

すぐに確かめられるが

$$(f,f)_{L^2}=\|f\|_{L^2}^2$$

が成り立つ.

$A\subset\mathbb{Z}$ に対して数列空間を

$$l^2(A)=\left\{a_k:A\to\mathbb{C};\ \|a_k\|_{l^2}=\left(\sum_{k\in A}|a_k|^2\right)^{1/2}<\infty\right\}$$

と定義する. $l^2(A)$ を l^2 とかくことがある.

l^2 内積は

$$(a_k,b_k)_{l^2}=\sum_{k\in A}a_k\overline{b_k}$$

と定義される.

L^2 最良近似

定理 1. $f \in L^2(-\pi,\pi)$ とする．任意の $N \in \mathbb{N}$ とする．任意の $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left\| f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \widehat{f} - d_k \right\|_{l^2(-N\le k\le N)}^2 \\
&= \left\| f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx} \right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．とくに

$$\left\| \widehat{f} \right\|_{l^2(-N\le k\le N)} \le \|f\|_{L^2}$$

が成り立つ．

証明. フーリエ変換の定義式と $\{(2\pi)^{-1/2}e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset L^2(-\pi,\pi)$ が正規直交系であることを用いて

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\| f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 \\
&= \left(f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx}, f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{l=-N}^{N} \widehat{f}(l) e^{ilx} \right)_{L^2} \\
&= (f,f)_{L^2} - \left(f, (2\pi)^{-1/2} \sum_{l=-N}^{N} \widehat{f}(l) e^{ilx} \right)_{L^2} - \left((2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx}, f \right)_{L^2} \\
&+ (2\pi)^{-1} \sum_{k,l=-N}^{N} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(l)} \left(e^{ikx}, e^{ilx} \right)_{L^2} \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - \left\| \widehat{f} \right\|_{l^2}^2 - \left\| \widehat{f} \right\|_{l^2}^2 + \left\| \widehat{f} \right\|_{l^2}^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - \left\| \widehat{f} \right\|_{l^2(-N\le k\le N)}^2
\end{aligned}$$

を得る[*1]. 次に

$$
\begin{aligned}
&\left\| f-(2\pi)^{-1/2}\sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 \\
&= \left(f-(2\pi)^{-1/2}\sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}, f-(2\pi)^{-1/2}\sum_{l=-N}^{N} d_l e^{ilx} \right)_{L^2} \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - (2\pi)^{-1/2}\sum_{l=-N}^{N} \overline{d_l}\left(f, e^{ilx}\right)_{L^2} - (2\pi)^{-1/2}\sum_{k=-N}^{N} d_k (e^{ikx}, f)_{L^2} + \sum_{k=-N}^{N} |d_k|^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - \left(\widehat{f}, d_k\right)_{l^2} - \left(d_k, \widehat{f}\right)_{l^2} + \|d_k\|_{l^2}^2
\end{aligned}
$$

となる. また $\widehat{f}$ と d_k の誤差について計算すると

$$
\left\|\widehat{f}-d_k\right\|_{l^2}^2 = \|d_k\|_{l^2}^2 - \left(\widehat{f}, d_k\right)_{l^2} - \left(d_k, \widehat{f}\right)_{l^2} + \left\|\widehat{f}\right\|_{l^2(-N\le k\le N)}^2
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\left\| f-(2\pi)^{-1/2}\sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 &= \left\|\widehat{f}-d_k\right\|_{l^2}^2 - \left\|\widehat{f}\right\|_{l^2(-N\le k\le N)}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \\
&= \left\|\widehat{f}-d_k\right\|_{l^2}^2 + \left\| f-(2\pi)^{-1/2}\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

□

[*1] パーセバルの等式 $\left\|\widehat{f}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2}$ が成り立つことがあるのでそれによる誤解を避けるためにこの部分は l^2 を $l^2(-N \le k \le N)$ とかいている.

注意 1. f とそのフーリエ級数の部分和の誤差は

$$r_N = f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

となる．また f と任意の複素数列 $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ を係数とする三角多項式[a]との誤差は

$$R_N = f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}$$

となる．このとき本質的には $\left\{\widehat{f}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \neq \{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ である場合を考えるので L^2 ノルムで誤差を比較すると

$$\|r_N\|_{L^2} < \|R_N\|_{L^2}$$

が成り立つ[b]．すなわち L^2 で計れば常に誤差 r_N は誤差 R_N より小さくなる．

[a] $\{e^{ikx}\}$ の有限一次結合

[b] $\left\{\widehat{f}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \neq \{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ でも $\widehat{f}(k) = d_k$ なる項がある場合もあるが適当な $l \geq 1$ に対して $\widehat{f}(l) \neq d_l$.

ベッセルの不等式

定理 2. $f \in L^2(-\pi, \pi)$ とする．このとき

(1) $\left\|\widehat{f}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^2}$ が成り立つ．

(2) $\left\|\widehat{f}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2}$ が成り立つことの必要十分条件は

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 = 0$$

が成り立つことである．

証明. L^2 最良近似の証明で得た次の式を用いる．

$$0 \leq \left\| f - (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \left\|\widehat{f}\right\|_{l^2(-N\leq k\leq N)}^2.$$

(1) 上に有界な単調増加列はその上限に収束するので (1) を得る．
(2) 等式より明らかである． □

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．この基本的な事実によりリーマン・ルベーグの補題を得る．

リーマン・ルベーグの補題

定理 3. $f \in L^2(-\pi,\pi)$ とする．このとき $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$ が成り立つ．

第3章　フーリエ級数の基本的な収束定理

補題 4 (2 重極限の交換)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ とする．2 変数関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ とする．極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

が存在するとする．このとき

(1) $y \neq b$ に対して $\lim_{x\to a} f(x,y) = g(y)$ が存在するとき

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b} g(y) = A$$

が成り立つ.

(2) $x \neq a$ に対して $\lim_{y\to b} f(x,y) = h(x)$ が存在するとき

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{x\to a} h(x) = A$$

が成り立つ.

すなわち上述の g, h が存在すれば極限の順序交換が可能である.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $\sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} < \delta$ ならば

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

また $\lim_{x\to a} f(x,y) = g(y)$ の仮定より $|y-b| < \delta/\sqrt{2}$ なる y に対して $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y) > 0$ を選んで $|x-a| < \delta_1/\sqrt{2}$ ならば

$$|f(x,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つようにできる．したがって $|y-b| < \delta/\sqrt{2}$ ならば, この y に応じて $|x_0 - a| <$

$(1/\sqrt{2})\min(\delta, \delta_1)$ をみたす x_0 を選んで

$$\begin{aligned}|g(y) - A| &= |g(y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - A| \\ &\leq |g(y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - A| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

これは $\lim_{y \to b} g(y) = A$ であることをいっている．上の議論では $(x, y) \in \Omega$ となる様に適当に δ などのパラメータを選んでいることに注意． □

注意 2. 二重数列 $\{a_{m,n}\}$ の二重極限 $\lim_{m,n \to \infty} a_{m,n}$ についても同様のことが言える．

補題 5. 区分的に C^1 級の関数 f に対して

$$\lim_{z \to +0} \frac{f(a+z) - f(a+0)}{z} = f'(a+0)$$

が成り立つ．

証明. 適当な近傍に含まれる部分集合上で考えることにして，簡単のために不連続点は a のみとして考える．f は区分的に C^1 級なので

$$f'(a+0) = \lim_{x \to a+0} f'(x)$$

が存在するから

$$f'(a) = f'(a+0)$$

とおけば閉区間 $I = [a, b]$ で f' は連続である．したがって連続関数は有界閉区間上において一様連続なので f' は $I = [a, b]$ で一様連続である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ が存在し $|z - w| < \delta_0$ をみたす任意の $z, w \in I$ に対して

$$|f'(z) - f'(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．任意の $x_0 \in (a, (a+b)/2)$ を固定する．このとき $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ が存在し $0 < |z| < \delta_1$ ならば適当な $\theta = \theta_{x_0,z} \in (0, 1)$ に対し

$$\left| \frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{z} - f'(x_0) \right| = |f'(x_0 + \theta z) - f'(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．ここで，平均値定理により

$$\frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{z} = f'(x_0 + \theta z)$$

となることを用いた．したがって適当な $0 < \delta < \min(\delta_0, \delta_1)$ が存在し $\sqrt{z^2 + h^2} < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a+z+h) - f(a+h)}{z} - f'(a+0) \right| \\
&= \left| \frac{f(a+z+h) - f(a+h)}{z} - f'(a+h) + f'(a+h) - f'(a+0) \right| \\
&= \left| \frac{f(a+h+z) - f(a+h)}{z} - f'(a+h) + f'(a+h) - f'(a) \right| \\
&\leq \left| \frac{f(a+h+z) - f(a+h)}{z} - f'(a+h) \right| + |f'(a+h) - f'(a)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

ただし上の議論では $a+h+z \in I$ や $a+h \in (a, (a+b)/2)$ をみたすように適当に $\delta_0, \delta_1, \delta$ を選んでいることに注意．以上により 2 変数関数の極限

$$\lim_{\substack{z \to +0 \\ h \to +0}} \frac{f(a+z+h) - f(a+h)}{z}$$

が存在し下のふたつの括弧の中身の収束先の関数が存在するから[*1] 極限の順序交換が可能で

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to +0} \frac{f(a+z) - f(a+0)}{z} &= \lim_{z \to +0} \left(\lim_{h \to +0} \frac{f(a+z+h) - f(a+h)}{z} \right) \\
&= \lim_{h \to +0} \left(\lim_{z \to +0} \frac{f(a+h+z) - f(a+h)}{z} \right) \\
&= f'(a+0).
\end{aligned}$$

□

注意 3. 上の証明の議論がわかりにくいと感じる場合は具体的に $a = 0$, $I = [0, 1]$ の場合に証明を考えてみれば良い．それだけで議論の本質は掴める．

定理 4. 周期 2π の関数 f は区分的に C^1 であるとする．このとき

$$S[f](x) = \frac{1}{2} \left(f(x+0) + f(x-0) \right) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

が成り立つ．ここで片側極限 $f(x \pm 0) = \lim_{y \to \pm 0} f(x+y)$．とくに f が x において連続であれば $S[f](x) = f(x)$ となる．

証明. $x \in [-\pi, \pi]$ として

$$I_N(x) = S_N[f](x) - \frac{1}{2} \left(f(x+0) + f(x-0) \right)$$

---

*1 $\displaystyle\lim_{h \to +0} \frac{f(a+z+h) - f(a+h)}{z} = \frac{f(a+z) - f(a)}{z}$, $\displaystyle\lim_{z \to +0} \frac{f(a+z+h) - f(a+h)}{z} = f'(a+h)$.

とおく．このとき

$$\int_0^\pi D_N(y)dy = \int_{-\pi}^0 D_N(y)dy = \frac{1}{2}$$

なので

$$\begin{aligned}
I_N(x) &= \int_{-\pi}^0 D_N(y)f(x-y)dy + \int_0^\pi D_N(y)f(x-y)dy \\
&\quad - f(x+0)\int_{-\pi}^0 D_N(y)dy - f(x-0)\int_0^\pi D_N(y)dy \\
&= \int_{-\pi}^0 (f(x-y)-f(x+0))D_N(y)dy + \int_0^\pi (f(x-y)-f(x-0))D_N(y)dy \\
&= \int_0^\pi (f(x+z)-f(x+0))D_N(z)dz + \int_{-\pi}^0 (f(x+z)-f(x-0))D_N(z)dz
\end{aligned}$$

を得る．ここで最後は D_N が偶関数であることを用いた．さらに D_N の別表現を用いて

$$\begin{aligned}
I_N(x) &= (2\pi)^{-1}\int_0^\pi (f(x+z)-f(x+0))\frac{\sin((N+1/2)z)}{\sin(z/2)}dz \\
&\quad + (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^0 (f(x+z)-f(x-0))\frac{\sin((N+1/2)z)}{\sin(z/2)}dz.
\end{aligned}$$

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(x+z)-f(x+0)}{\sin(z/2)} & (z \in (0,\pi]) \\[2ex] \dfrac{f(x+z)-f(x-0)}{\sin(z/2)} & (z \in [-\pi, 0)) \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to+0} g(z) &= \lim_{z\to+0}\left(2\cdot\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin(z/2)}\right) = 2f'(x+0), \\
\lim_{z\to-0} g(z) &= \lim_{z\to-0}\left(2\cdot\frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin(z/2)}\right) = 2f'(x-0).
\end{aligned}$$

したがって f が区分的に C^1 なので g は区分的に連続である．

$$I_N(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^\pi g(z)\sin((N+1/2)z)dz$$

なのでリーマン・ルベーグの補題より

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x) = 0$$

が成り立つ．これで主定理を示すことができた． □

注意 4. 第 1 章で考えたフーリエ級数の問題点に対してこの定理はどの様にこたえているのか考察してみよう．この定理によれば f が区分的に C^1 級であればそのフーリエ級数は各点収束し，その収束先は一般には f ではなく片側極限の平均 $(1/2)(f(\cdot+0)+f(\cdot-0))$ である．とくに f が連続である様な点 a においては $S[f](a)$ は $f(a)$ に各点収束するということである．

具体例におけるフーリエ級数の計算

ここではフーリエ級数の具体例をひとつだけ紹介しよう．

$$f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

で与えられる周期 2π の関数のフーリエ級数を考える．この関数は定理の仮定を満たしている．しかも連続関数であるから各点において $f = S[f]$ が成り立つ．以下では実際に計算することで $S[f]$ を求めてみよう．まずフーリエ変換を求めよう．$k \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} |x| dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(kx) x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(kx)}{k} \right)' x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left[\frac{\sin(kx)}{k} x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} \left[\cos(kx) \right]_0^{\pi} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

となる．$k = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

となる. 次にフーリエ級数を求めよう.

$$
\begin{aligned}
S[f](x) &= (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{f}(k) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(kx) \frac{1}{k^2}((-1)^k - 1) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}
\end{aligned}
$$

となる. $|x| = S[f](x)$ なので $x = 0$ を代入すると

$$
0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}
$$

なので公式

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
$$

を得ることができる.

第II部

フーリエ変換

第4章　L^1 におけるフーリエ変換

$1 \leq p < \infty$ に対して p 乗可積分関数の空間 $L^p = L^p(\mathbb{R})$ は

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

と定義される．L^1 に属す関数のことを単に可積分関数と呼ぶことがある．また $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R})$ は

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess.sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty \right\}$$

と定義される[*1]．L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ はバナッハ空間である[*2].

次の定理が知られている．

ルベーグの収束定理

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が各点 $x \in \mathbb{R}$ に対して存在しているとする．また

$$\sup_{n \geq 1} |f_n(x)| \leq g(x) \quad (x \in \mathbb{R}\ (a.e.))$$

をみたす $g \in L^1$ が存在しているとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx$$

が成り立つ．パラメータが連続的に変化する場合も同様の収束定理が成り立つ.

積分記号下における微分公式

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ として関数 $f(t,x)$ $((t,x) \in \Omega \times \mathbb{R})$ は $t \in \Omega$ に対して $f(t,\cdot) \in L^1_x$ をみたし

$$|\partial_t f(t,x)| \le g(x) \ (x \in \mathbb{R}\ (a.e.))$$

なる $g \in L^1$ が存在するとき, 以下の積分が変数 t に関して微分可能であり

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} f(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_t f(t,x)dx$$

が成り立つ.

この資料では上述の定理は証明なしに用いることにする[*3].

可積分関数のフーリエ変換

$f \in L^1$ に対してフーリエ変換 $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ とフーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto f^\vee$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),\\ f^\vee(x) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi)d\xi \quad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

と定義される.

定理 5. $f \in L^1$ ならば $\widehat{f} \in L^\infty \cap C(\mathbb{R})$ となり, さらに

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \le (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1}$$

が成り立つ. $f^\vee$ についても同様.

証明. 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi)\right| &= \left|(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx\right|\\ &\le (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx\\ &= (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

[*3] 証明については積分論に関する文献を参照すると良い.

右辺は ξ に依存しない．左辺の上限をとることで示すべき不等式が成り立つ．$\xi_0 \in \mathbb{R}$ とすると

$$\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi_0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}\right) f(x) dx$$

であるが

$$\left|\left(e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}\right) f\right| \leq 2|f| \in L^1$$

なので右辺は $\xi \to \xi_0$ の極限で 0 に収束する． □

具体例におけるフーリエ変換の計算

例 5. $a > 0$ とする．$f(x) = \chi_a(x),\ x \in \mathbb{R}$ と定義する．ここで, 特性関数[*4]

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}.$$

明らかに $f \in L^1$ である．

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \chi_a(x) dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x} dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left[\frac{1}{-i\xi} e^{-i\xi x}\right]_{-a}^{a} \\
&= (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{i\xi} (e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}) \\
&= (2\pi)^{-1/2} \frac{2\sin(a\xi)}{\xi} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \\
&= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.
\end{aligned}$$

[*4] 切り落とし関数とか定義関数と呼ばれることもある．

例 6. $a>0$ とする．$f(x)=e^{-a|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$ と定義すると $f\in L^1$ である．

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-a|x|}dx \\
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0} e^{-i\xi x}e^{ax}dx + (2\pi)^{-1/2}\int_{0}^{\infty} e^{-i\xi x}e^{-ax}dx \\
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}dx + (2\pi)^{-1/2}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}dx \\
&= (2\pi)^{-1/2}\left(\left[\frac{1}{a-i\xi}e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{1}{a+i\xi}e^{-(a+i\xi)x}\right]_{0}^{\infty}\right) \\
&= (2\pi)^{-1/2}\left(\frac{1}{a-i\xi}+\frac{1}{a+i\xi}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

例 7 (ガウス関数)**.** $a>0$ とする．

$$G_a(x)=e^{-ax^2}\ (x\in\mathbb{R})$$

と定義する．この形をした関数をガウス関数と呼ぶ．このとき $G_a\in L^1(\mathbb{R})$ であるから以下では

$$\widehat{G_a}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-ax^2}dx\ (\xi\in\mathbb{R})$$

を求める．ここで注意したいのは $\widehat{G_a}$ の具体的な式はまだわからないが存在することは保証されているということである．$G_a=e^{-ax^2}$ の無限遠方での減衰の速さが $x\mapsto|x|$ の増大の速さよりも速いので $|x|G_a$ は可積分となり

$$\left|\partial_\xi(e^{-i\xi x}e^{-ax^2})\right| = |x|G_a\in L^1(\mathbb{R})$$

なので積分記号下で微分が可能で

$$\frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-ax^2}dx = \int_{\mathbb{R}}\partial_\xi\left(e^{-i\xi x}e^{-ax^2}\right)dx$$

となる．$\widehat{G_a}$ の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{G_a}}{d\xi}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(-ix)e^{-i\xi x}e^{-ax^2}dx \\
&= (2\pi)^{-1/2}\frac{i}{2a}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\partial_x\left(e^{-ax^2}\right)dx \\
&= -(2\pi)^{-1/2}\frac{i}{2a}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\partial_x\left(e^{-i\xi x}\right)dx \\
&= -\frac{\xi}{2a}\widehat{G_a}(\xi).
\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d\widehat{G_a}}{d\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\widehat{G_a}(\xi)$$

を得る．この常微分方程式は解くことができ

$$\widehat{G_a}(\xi) = \widehat{G_a}(0)e^{-\xi^2/4a}$$

となる．ここで

$$\widehat{G_a}(0) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

なので

$$\widehat{G_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\xi^2/4a}.$$

$\widehat{G_a}$ は $\mathcal{F}$ による像だから上に求めた関数が唯一の $\widehat{G_a}$ として決まる．ここまでに得られた結果についてひとつ注意したいことはガウス関数をフーリエ変換したものはまたガウス関数となることである．とくに $a = 1/2$ に対してはフーリエ不変である．すなわち

$$\mathcal{F}[G_{1/2}] = G_{1/2}.$$

フーリエ変換の基本的な性質

$y \in \mathbb{R}$ に対して平行移動作用素 $\tau_y : L^1 \to L^1$ を

$$(\tau_y f)(x) = f(x+y) \ (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．$a > 0$ に対して伸長作用素 $D_a : L^1 \to L^1$ を

$$(D_a f)(x) = f(ax) \ (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．複素共役を与える作用素 $\mathcal{C} : L^1 \to L^1$ を

$$(\mathcal{C}f)(x) = \overline{f(x)} \ (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．引数の符号を変える作用素 $T : L^1 \to L^1$ を

$$(Tf)(x) = f(-x) \ (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．$y \in \mathbb{R}$ に対して掛け算作用素 $M_y : L^1 \to L^1$ を

$$(M_y f)(x) = e^{ixy}f(x) \ (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．

定理 6. $y \in \mathbb{R}, a > 0$ とする．このとき

(1) $\mathcal{F} \circ \tau_y = M_y \circ \mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{F} \circ D_a = a^{-1} D_{a^{-1}} \circ \mathcal{F}$.

(3) $\mathcal{F} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{F}^{-1}$.

(4) $\mathcal{F} \circ T = \mathcal{F}^{-1}$.

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう． □

第5章　フーリエ変換と微分および合成積

フーリエ変換と微分

定理 7.

(1) $f \in L^1 \cap C^1(\mathbb{R})$ でさらに $df/dx \in L^1$ であるとする．このとき

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\xi) = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

(2) $f \in L^1$ かつ $\int_{\mathbb{R}} |x||f(x)|dx < \infty$ のとき $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ となり

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = (\widehat{-ix \cdot f})(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

証明. (1)

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f'(x)dx$$

である．$x > 0$ とする．一回連続微分可能な関数だから微積分の基本定理より

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

と書くことができ $f' \in L^1$ なので

$$\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \alpha \geq 0$$

が存在する．$\alpha \neq 0$ であれば $\varepsilon = \alpha/2$ に対して $M = M(\varepsilon) > 0$ が存在し $x \geq M$ ならば

$$\big||f(x)| - \alpha\big| < \varepsilon.$$

すなわち

$$\frac{\alpha}{2} < |f(x)| < \frac{3\alpha}{2}$$

が成り立つので

$$\int_M^\infty |f(x)|dx > \frac{\alpha}{2}\int_M^\infty dx = \infty$$

となり可積分であることに反する．したがって $\alpha = 0$. すなわち

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R_2} e^{-i\xi x} f'(x)dx &= \left[e^{-i\xi x} f(x)\right]_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} (-i\xi) e^{-i\xi x} f(x)dx \\ &= \left[e^{-i\xi x} f(x)\right]_{R_1}^{R_2} + i\xi \int_{R_1}^{R_2} e^{-i\xi x} f(x)dx\end{aligned}$$

なので, $R_1 \to -\infty, R_2 \to \infty$ とすることで

$$\mathcal{F}\left[f'\right](\xi) = i\xi \cdot \mathcal{F}\left[f\right](\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

を得る.

(2)

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_\xi (e^{-i\xi x} f(x))dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}(-ix)f(x)dx$$

であるが

$$|\partial_\xi (e^{-i\xi x} f)| = |e^{-i\xi x}(-ix)f| = |x||f| \in L^1$$

なので積分記号下で微分ができ

$$\frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}(-ix)f(x)dx$$

となり定理の主張を得る.

□

注意 5. この定理のいっていることは, 実空間 $\mathbb{R}_x$ における f の微分はフーリエ空間 $\mathbb{R}_\xi$ における $\widehat{f}$ の多項式倍に置き換わるということである．またフーリエ空間 $\mathbb{R}_\xi$ における $\widehat{f}$ の微分は $\mathbb{R}_x$ における f の多項式倍に置き換わる．この様な性質を持つのでフーリエ変換は微分方程式やそれに関連する関数空間の研究において応用される.

フーリエ変換と合成積

トネリの定理

$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする

$$\int_{\mathbb{R}}|F(x,y)|dy<\infty$$

が $x\in\mathbb{R}$ $(a.e.)$ で成り立ち

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|F(x,y)|dy\right)dx<\infty$$

ならば $F\in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

フビニの定理

$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする．$F\in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ であれば

$$F(\cdot,y)\in L^1_x(\mathbb{R})\ (y\in\mathbb{R}\ (a.e.))\ \text{かつ}\ \int_{\mathbb{R}}F(x,\cdot)dx\in L^1_y(\mathbb{R}),$$

同様に

$$F(x,\cdot)\in L^1_y(\mathbb{R})\ (x\in\mathbb{R}\ (a.e.))\ \text{かつ}\ \int_{\mathbb{R}}F(\cdot,y)dy\in L^1_x(\mathbb{R})$$

が成り立ち

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}F(x,y)dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}F(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}F(x,y)dxdy.$$

ふたつの可積分関数 f,g に対して

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy\quad(x\in\mathbb{R})$$

を f,g の合成積という．たたみ込みと呼ぶこともある．次の式

$$f*g=g*f$$

が成り立つ．実際, $x\in\mathbb{R}$ を固定して考えると

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\\&=\int_{\infty}^{-\infty}f(z)g(x-z)(-dz)\quad(z=x-y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-z)f(z)dz\\&=(g*f)(x).\end{aligned}$$

定理 8. $f, g \in L^1$ ならば $f * g \in L^1$ となり

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{1/2} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

が成り立つ.

証明.

$$F(x,y) = f(x-y)g(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

とおくことにする. $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$$

となるので

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty.$$

ここで $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx$$

であることを用いた. これより $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dy \right) dx$$

がいえる. したがって

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dy \right) dx < \infty.
\end{aligned}$$

これで $f * g$ の可積分性がいえた. 次に積分順序の交換を行ないながら以下を得る

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (f * g)(x) dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-y) dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi (x-y)} f(x-y) dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{1/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} g(y) \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{1/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} g(y) dy (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \\
&= (2\pi)^{1/2} \left(\widehat{f} \cdot \widehat{g} \right) (\xi).
\end{aligned}
$$

□

第6章　熱核およびL^1における反転公式

ここでは以下のふたつの事実を用いる．これらも前章までと同様に証明なしに用いる．

ヘルダー不等式

$1 \leq p \leq \infty$ と $1 \leq q \leq \infty$ は $1/p+1/q=1$ をみたすとする．このとき $f \in L^p$, $g \in L^q$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

が成り立つ．ただし $p=\infty$ のときは $q=1$ とする．

$1 \leq p < \infty$ とする．$f \in L^p$ ならば

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)-f(x)|^p dx = 0$$

が成り立つ．

熱核

この後の章における議論で用いるので熱核を導入する．$t>0$ として

$$U_t(x) = (4\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4t} \quad (x \in \mathbb{R})$$

を熱核という[*1]．ガウス積分を思い出せば

$$\int_{\mathbb{R}} U_t(x)dx = 1$$

であることがわかる．これがなぜ熱核と呼ばれるかというと熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, \\ u(\cdot,0) = \phi \in L^p \end{cases}$$

の解は

$$u(x,t) = (U_t * \phi)(x) = (4\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t}\phi(y)dy,\ t>0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

[*1] ガウス核ともいう．

で与えられるからである．熱核は以下の性質を持つ．これは熱方程式の解の振る舞いと解釈することも出来るが後に反転公式の証明において重要な役割を果たす．

定理 9. $1 \le p < \infty$ とする．$f \in L^p$ に対して

$$f_t(x) = \int_{\mathbb{R}} U_t(x-y)f(y)dy,\ x \in \mathbb{R}$$

は

$$\lim_{t\to+0} \|f_t - f\|_{L^p} = 0$$

を満たす．

証明. まず $1 < p < \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} U_t(x-y)f(y)dy\right| &\le (4\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t}|f(y)|dy \\ &\le (4\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t}|f(y)|dy \\ &\le (4\pi t)^{-1/2}\left\|e^{-(x-y)^2/4t}\right\|_{L^q_y}\|f\|_{L^p} < \infty.\end{aligned}$$

ここで $1 < q < \infty$ は $1/p + 1/q = 1$ をみたす．$p = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} U_t(x-y)f(y)dy\right| &\le (4\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t}|f(y)|dy \\ &\le (4\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t}|f(y)|dy \\ &\le (4\pi t)^{-1/2}\|f\|_{L^1} < \infty.\end{aligned}$$

したがって $t > 0$ に対して f_t は積分として適切に定義されている．$1 < p < \infty$ のときに

$$U_t(y) = U_t(y)^{1/q}U_t(y)^{1/p}$$

としてヘルダー不等式を用いて

$$\begin{aligned}|f_t(x) - f(x)|^p &\le \left(\int_{\mathbb{R}} U_t(y)^{1/q}U_t(y)^{1/p}|f(x-y) - f(x)|dy\right)^p \\ &\le \left(\|U_t\|_{L^1}^{1/q}\left\|U_t^{1/p}|f(x-\cdot) - f(x)|\right\|_{L^p}\right)^p \\ &= \int_{\mathbb{R}} U_t(y)|f(x-y) - f(x)|^p dy\end{aligned}$$

となる．これを x に関して積分して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \le 2^{p+1}\|f\|_{L^p}^p < \infty$$

が成り立つので[*2] 積分順序の交換ができ

$$\int_{\mathbb{R}} |f_t(x) - f(x)|^p dx \le \int_{\mathbb{R}} U_t(y) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy$$

が成り立つ. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し

$$\sup_{|y|<\delta} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p dx < \varepsilon$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f_t(x) - f(x)|^p dx &\le \int_{\{|y|<\delta\}\cup\{|y|>\delta\}} U_t(y) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy \\
&\le \varepsilon \int_{|y|<\delta} U_t(y) dy + 2^{p+1} \|f\|_{L^p}^p \int_{|y|>\delta} U_t(y) dy \\
&\le \varepsilon + 2^{p+1} \|f\|_{L^p}^p \int_{|y|>\delta} U_t(y) dy.
\end{aligned}$$

この不等式は $p = 1$ のときにも成り立つ. ここで最後の項は $y^2 = 4tz$ と置き換えると

$$\begin{aligned}
\int_{|y|>\delta} U_t(y) dy &= \int_{|y|>\delta} (4\pi t)^{-1/2} e^{-y^2/4t} dy \\
&= 2 \int_{\delta}^{\infty} (4\pi t)^{-1/2} e^{-y^2/4t} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta^2/4t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z} dz \\
&\le \frac{2\sqrt{t}}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-z} dz \\
&\to 0 \quad (t \to +0).
\end{aligned}$$

以上より

$$\lim_{t\to+0} \|f_t - f\|_{L^p} = 0$$

を満たす. □

反転公式

[*2] $|f(x-y) - f(x)|^p \le (|f(x-y)| + |f(x)|)^p \le (2\max(|f(x-y)|, |f(x)|))^p = 2^p \max(|f(x-y)|^p, |f(x)|^p) \le 2^p (|f(x-y)|^p + |f(x)|^p)$

まず反転公式という言葉の意味について説明する．関数 f に対して

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

すなわち

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$$

が成り立つとき，この式を反転公式とよぶ．すなわちフーリエ変換とフーリエ逆変換を続けて作用させると元に戻るということである．

$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = f$ が成り立てば $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$ も成り立つ．フーリエ変換とフーリエ逆変換はその定義において $e^{\pm i\xi x}$ の格好をした指数関数の肩の符号が異なるだけなので積分変換として捉えた場合は本質的に同じものである．もちろん同時に扱う場合は両者を混同しない様に注意が必要である．

反転公式はどんな関数に対しても成り立つことが保証されているわけではない．ここまではフーリエ変換は L^1 において定義している．L^1 の関数がフーリエ変換を施した後も L^1 であるとも限らないのでフーリエ変換を施したあとにフーリエ逆変換を定義することすらできるかわからない．実は L^1 においてそのフーリエ変換も L^1 であれば反転公式が成り立つ．この章ではその様な L^1 における反転公式を熱核を用いて証明する．

定理 10. $f \in L^1$ かつ $\widehat{f} \in L^1$ ならば反転公式 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$ が成り立つ．

証明. $t > 0$ として

$$f_t(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-t\xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を考える．このとき

$$\begin{aligned} f_t(x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-t\xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-t\xi^2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi - t\xi^2} d\xi \right) f(y) dy \end{aligned}$$

ここでガウス関数のフーリエ変換の結果より

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi - t\xi^2} d\xi &= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-t\xi^2} \right] (\zeta) \Big|_{\zeta = x-y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-(x-y)^2/4t} \end{aligned}$$

なので

$$f_t(x) = \int_{\mathbb{R}} U_t(x-y)f(y)dy$$

となる. 前章における熱核の性質より

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathbb{R}} |f_t(x)-f(x)|dx = 0$$

である. したがって数列 $\{t_n\}$ で $t_n \to +0$ $(n\to\infty)$ なるものに対しても

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_{t_n}(x)-f(x)|dx = 0.$$

またルベーグの収束定理を用いて各点収束の意味で

$$\lim_{t\to+0} f_t(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

一方でルベーグ積分論においてよく知られた定理によって部分列 $\{t_{n_k}\}$ で $t_{n_k} \to 0$ $(k\to\infty)$ なるものを引き抜いて

$$\lim_{k\to\infty} f_{t_{n_k}}(x) = f(x) \quad (x\in\mathbb{R}\ (a.e.))$$

となる. したがって極限値の一意性より

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi$$

が $x\in\mathbb{R}$ $(a.e.)$ に対していえたことになる. □

第7章　急減少関数, フリードリックスの軟化子I

急減少関数

集合

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R});\ \forall k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.\ \exists C_{k,m} > 0 :\ \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^m \left|\varphi^{(k)}(x)\right| \le C_{k,m} \right\}$$

を急減少関数の空間という.

ここでは $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の位相を紹介しないが適当な意味における位相も定まる.

定理 11. 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p$ である.

証明. 任意の $1 \le p \le \infty$ とする. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする. $(k, m) = (0, 2)$ とする. このとき $C_{0,2} > 0$ が存在し

$$|\varphi(x)| \le \frac{C_{0,2}}{(1 + |x|)^2}$$

が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つので $\varphi \in L^1 \cap L^\infty \subset L^p$. □

この定理より $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ においてフーリエ変換を積分として定義することができる.

急減少関数のフーリエ変換

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対してフーリエ変換 $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ とフーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto f^\vee$ はそれぞれ

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$
$$f^\vee(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定義される.

次のことが言える

定理 12. $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への全単射写像である．さらに $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して反転公式 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$ が成り立つ.

証明. L^1 におけるフーリエ変換の結果を適用して $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ で

$$\frac{d^k \widehat{\varphi}}{d\xi^k} = \widehat{(-ix)^k \varphi}$$

となることがわかる．同様に

$$(i\xi)^m \frac{d^k \widehat{\varphi}}{d\xi^k} = \mathcal{F}\left[\frac{d^m}{dx^m}\left((-ix)^k\varphi\right)\right]$$

となる．急減少関数の空間の定義の仕方から

$$\frac{d^m}{dx^m}\left((-ix)^k\varphi\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1$$

がわかるので $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である．これはフーリエ逆変換についても同様である．L^1 における反転公式が成り立つので $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ においても反転公式が成り立つ．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$v = \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

は反転公式より $\widehat{v} = \varphi$ を満たすので全射である．$\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$ とすると

$$\widehat{(\varphi - \psi)} = 0$$

なのでフーリエ逆変換をとると

$$\varphi - \psi = \mathcal{F}^{-1}[0] = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \cdot 0 d\xi = 0.$$

これは単射であることを意味する. □

開球

中心 $a \in \mathbb{R}$, 半径 $r > 0$ の開球を

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < r\}$$

と定義する.

局所可積分関数

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする．任意の有界集合 $K \subset I$ において可積分な関数 $f : I \to \mathbb{C}$ を局所可積分であるといい, 局所可積分な関数全体の集合を $L^1_{loc}(I)$ とかく．

関数の台 1

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする．連続関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{supp}\ f = \overline{\{x \in I;\ f(x) \neq 0\}}$$

を台という．ここで $\overline{A}$ は $A \subset \mathbb{R}$ の閉包である．

$A \subset \mathbb{R}$ の閉包は $\overline{A} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset A \text{ が存在し } \lim_{j\to\infty} x_j = x \right\}$ と特徴づけられることが知られている． 例えば $A = (0,1)$ については $\overline{A} = [0,1]$ である． $\{x_j\} = \{1 - 1/2j\} \subset (0,1)$ は $x_j \to 1$ $(j \to \infty)$ を満たす． また $\{y_j\} = \{1/2j\} \subset (0,1)$ は $y_j \to 0$ $(j \to \infty)$ を満たす．

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $C_0^\infty(I)$ は I においてコンパクトな台をもつ無限回連続微分可能な関数の全体として定義される．すなわち

$$C_0^\infty(I) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R});\ \text{有界集合 } K \subset I \text{ が存在し } \mathrm{supp}\ \varphi \subset K\}$$

と定義する．

関数の台 2

一般の可測関数に対する台は上の様な定義では都合が悪い． 実際に有理数上の特性関数

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

を考えると $\overline{\{x \in \mathbb{R};\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ となってしまい台として意図するものと異なる．そこで局所可積分関数に対して次の様な定義を与える．

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする． $f \in L^1_{loc}(I)$ に対して $\mathrm{supp}\ f$ はその補集合を次の様に定めることで定義する． $a \notin \mathrm{supp}\ f$ は $\epsilon > 0$ が存在し（ここで $\epsilon > 0$ は $B_\epsilon(a) \subset I$ をみたす様

に選んでいる）任意の $\varphi \in C_0^\infty(B_\epsilon(a))$ に対して

$$\int_I f(x)\varphi(x)dx = 0$$

が成り立つものとする.

$I = \mathbb{R}$ とする. 任意の $a \in \mathbb{R}$ とする. 任意の $\epsilon > 0$ と $\varphi \in C_0^\infty(B_\epsilon(a))$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{Q}\cap B_\epsilon(a)} \varphi(x)dx = 0$$

である. したがって, supp $\chi_{\mathbb{Q}} = \varnothing$. ここで $\mathbb{Q}$ はルベーグ測度の意味で零集合であることに注意.

フリードリックスの軟化子の導入

補題 6. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0) \end{cases}$$

と定義する. このとき $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ で $\varphi^{(n)}(0) = 0$ $(n \ge 1)$ をみたす.

証明. $x \neq 0$ で無限回微分可能であることは明らかである.

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-1/x} = x^{-2n} P_n(x) e^{-1/x}$$

の形になる. ここで $P(x)$ は x の $n-1$ 次多項式である[*1]. したがって

$$\lim_{x\to+0} \varphi^{(n)}(x) = \lim_{x\to+0} \frac{d^n}{dx^n} e^{-1/x} = 0 \quad (n \ge 0)$$

であることがわかる. 次に $x = 0$ において n 回微分可能で $\varphi^{(n)}(0) = 0$ であることを数学的帰納法で示そう. まず $n = 1$ のときは $h > 0$ とすると, 平均値定理より $0 < c_h < h$ が存在し

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi'(c_h) \to 0 \quad (h \to +0)$$

[*1] よくわからなければ実際に 2 回か 3 回ぐらい微分してみれば良い.

であるから $x=0$ で微分可能で $\varphi'(0)=0$. $n\geq 1$ で正しいとして $n+1$ のときを考える. すなわち $\varphi^{(n)}(0)=0$ が成り立っているとする. このとき $h>0$ とすると平均値定理より $0<d_h<h$ が存在し

$$\frac{\varphi^{(n)}(h)-\varphi^{(n)}(0)}{h}=\varphi^{(n+1)}(d_h)\to 0 \quad (h\to +0)$$

なので $\varphi^{(n)}$ は $x=0$ で微分可能で $\varphi^{(n+1)}(0)=0$. 上の議論で $h<0, h\to -0$ を考える場合は $\varphi^{(n)}(h)=0$ であるから同じ結果を得る. 以上により任意の $n\geq 1$ に対して $\varphi^{(n)}(0)=0$. □

ここでの話題に直接の関係はないが φ はテイラー展開可能でない関数のひとつの例としても知られる. 実際, 原点近傍でテイラー展開できたとすると $\varphi(t)\neq 0$ $(t>0)$ であるが

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k=0$$

となり矛盾するからである. 上の定理より関数

$$f(x)=\varphi(1-|x|^2) \quad (x\in\mathbb{R})$$

は $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ で $f(x)=0$, $|x|\geq 1$ を満たす. $\rho\in C^\infty(\mathbb{R})$ で

$$\int_{\mathbb{R}}\rho(x)dx=1,$$
$$\rho\geq 0,\ \mathrm{supp}\ \rho\subset\{x\in\mathbb{R};\ |x|\leq 1\}$$

を満たすものを考える. この様な関数は実際に存在する. 例えば上で定義した f に対して $\rho=Cf$ がその例である. ここで定数 $C=\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(1-|x|^2)dx\right)^{-1}$. 次に

$$\rho_\epsilon(x)=\epsilon^{-1}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (x\in\mathbb{R},\ \epsilon>0)$$

とおくと

$$\int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(x)dx=1$$

となる. $1\leq p<\infty$ として $f\in L^p$ に対して

$$(\rho_\epsilon * f)(x)=\int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(x-y)f(y)dy \quad (x\in\mathbb{R})$$

とする. このとき作用素: $f\mapsto \rho_\epsilon * f$ のことをフリードリックスの軟化子と呼ぶ. フリードリックスの軟化子が持つ重要な性質について次の章で詳しく述べる.

第8章　フリードリックスの軟化子II

定理 13. $1 \le p < \infty$ とする．$f \in L^p$ とする．このとき $\epsilon > 0$ に対して以下の (1), (2) と $\epsilon \to 0$ の極限 (3) が成り立つ．

(1) $\|\rho_\epsilon * f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$

(2) $\rho_\epsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R})$ かつ $(\rho_\epsilon * f)^{(k)} = \rho_\epsilon^{(k)} * f \ (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

(3) $\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^p} \to 0 \quad (\epsilon \to 0)$

証明. (1) $p > 1$ として $1/p + 1/q = 1$ とする．ヘルダー不等式を用いて

$$\begin{aligned}
|(\rho_\epsilon * f)(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y) f(y) dy \right|^p \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y)^{1/q} \rho_\epsilon(x-y)^{1/p} f(y) dy \right|^p \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

この両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\left(\rho_\epsilon * f\right)(x)|^p dx &\le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y) dx |f(y)|^p dy \\
&= \|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

$p = 1$ のときは直ちに同様の評価式を得られる．以上より求める不等式が示された．
(2) $a \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．$0 < |h| < 1$ とすると

$$\begin{aligned}
\frac{(\rho_\epsilon * f)(a+h) - (\rho_\epsilon * f)(a)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_\epsilon(a+h-y) - \rho_\epsilon(a-y)}{h} f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon'(a + \theta h - y) f(y) dy \\
&= \int_{0 \le |y| \le \epsilon + |a| + 1} \rho_\epsilon'(a + \theta h - y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

ここで, 2 番目の等式において被積分関数に対し $\theta = \theta_{h,y} \in (0,1)$ が存在して, 平均値定理が成り立つことを用いた．また $\mathrm{supp}\ \rho_\epsilon \subset \{x \in \mathbb{R};\ |x| \le \epsilon\}$ なので $|y| = |a + \theta h - y -$

$(a+\theta h)| \le \epsilon + |a| + 1$ と評価した．最後の式の $\rho'_\epsilon(a+\theta h-y)$ は h, y に関して一様に有界で

$$|\rho'_\epsilon(a+\theta h-\cdot)f| \le M|f| \in L^1\left(\overline{B_{\epsilon+|a|+1}(0)}\right).$$

したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(\rho_\epsilon * f)(a+h)-(\rho_\epsilon * f)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\int_{0\le|y|\le\epsilon+|a|+1}\rho'_\epsilon(a+\theta h-y)f(y)dy \\
&= \int_{0\le|y|\le\epsilon+|a|+1}\lim_{h\to 0}\rho'_\epsilon(a+\theta h-y)f(y)dy \\
&= \int_{0\le|y|\le\epsilon+|a|+1}\rho'_\epsilon(a-y)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\rho'_\epsilon(a-y)f(y)dy.
\end{aligned}$$

すなわち

$$(\rho_\epsilon * f)'(a) = (\rho'_\epsilon * f)(a)$$

となる．上の議論では $\epsilon > 0$ は固定されていて $\rho_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ということしか用いていないので上の議論を何回でも繰り返すことが可能である．したがって a の任意性により $\rho_\epsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(3) $1 < p < \infty$ とする．(1) のときと同じ様に

$$\begin{aligned}
(\rho_\epsilon * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(x-y)f(y)dy - \int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(y)f(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(y)f(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(y)f(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(y)(f(x-y)-f(x))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(y)^{1/q}\rho_\epsilon(y)^{1/p}(f(x-y)-f(x))dy
\end{aligned}$$

を得るので, ヘルダー不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|(\rho_\epsilon * f)(x) - f(x)|^p dx &\le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho_\epsilon(y)dy|f(x-y)-f(x)|^p dx \\
&= \int_{0\le|y|\le\epsilon}\rho_\epsilon(y)\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|^p dxdy
\end{aligned}$$

任意の $\eta > 0$ に対して $\delta = \delta(\eta) > 0$ が存在し $|y| < \delta$ ならば

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|^p dx < \eta$$

なので $0<\epsilon<\delta$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\left(\rho_\epsilon * f\right)(x) - f(x)|^p dx &\le \int_{0\le|y|\le\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|^p dxdy \\
&< \eta \int_{0\le|y|\le\epsilon} \rho_\epsilon(y) dy \\
&\le \eta.
\end{aligned}
$$

$p=1$ のときも同様. □

定理 14. $1\le p<\infty$ とする. $C_0^\infty(\mathbb{R})$ は L^p において稠密である. すなわち任意の $f\in L^p$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が存在し

$$
\|f-\varphi\|_{L^p}<\varepsilon
$$

が成り立つ.

証明. カットオフ関数

$$
\chi_R(x)=\begin{cases} 1 & (|x|\le R) \\ 0 & (|x|>R) \end{cases}
$$

とする. このとき $\lim_{R\to\infty}\|f-\chi_R f\|_{L^p}=0$ なので[*1] 任意の $\eta>0$ に対して $L=L(\eta)>0$ が存在し $R\ge L$ ならば

$$
\|f-\chi_R f\|_{L^p}<\frac{\eta}{2}
$$

が成り立つ. とくに $R=L$ に対して成り立つ. $\psi_{\epsilon,L}=\rho_\epsilon*(\chi_L f)$ とすると $\delta=\delta(\eta)>0$ が存在し $0<\epsilon<\delta$ ならば

$$
\|\psi_{\epsilon,L}-\chi_L f\|_{L^p}<\frac{\eta}{2}
$$

が成り立つ. したがって $0<\epsilon<\min(1,\delta)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|\psi_{\epsilon,L}-f\|_{L^p} &\le \|\psi_{\epsilon,L}-\chi_L f\|_{L^p}+\|f-\chi_L f\|_{L^p} \\
&< \eta
\end{aligned}
$$

[*1] $x\in\mathbb{R}$ とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $|x|\le M$ なる $M=M(x)>0$ が存在し $R\ge M$ ならば $|\chi_R(x)f(x)-f(x)|=0<\varepsilon$ が成り立つので各点収束の意味で $\chi_R(x)f(x)\to f(x)$ $(R\to\infty)$. また $|\chi_R f-f|^p\le(|\chi_R f|+|f|)^p\le 2^p|f|^p\in L^1$, なのでルベーグ収束定理より $\int_{\mathbb{R}}|\chi_R(x)f(x)-f(x)|^p dx\to 0$ $(R\to\infty)$.

となる．また $\psi_{\epsilon,L} \in C^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\operatorname{supp}\psi_{\epsilon,L} \subset \{x \in \mathbb{R}; |x| \le 1+L\}$ なので[*2] $\psi_{\epsilon,L} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ということになる．以上より $C_0^\infty(\mathbb{R})$ は L^p において稠密である． □

注意 6. この定理における稠密性について $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R})}^{L^p} = L^p$ と表すこともできる．この記号は L^p の位相で閉包をとるという意味であることに注意.

$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p$ なので直ちに以下の事実を得る．

定理 15. $1 \le p < \infty$ とする．$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は L^p において稠密である．すなわち任意の $f \in L^p$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在し

$$\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 任意の $f \in L^p$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在し $\|\varphi - f\|_{L^p} < \varepsilon$ が成り立つ． □

以下の命題は重要なので紹介しておこう.

リーマン・ルベーグの補題

定理 16. $f \in L^1$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ が成り立つ.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ とする．f に L^1 ノルムで収束する点列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在する．すなわち $N = N(\varepsilon) \ge 1$ が存在し $n \ge N$ ならば

$$\|f - \varphi_n\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}(2\pi)^{1/2}$$

が成り立つ．とくに $n = N$ に対して成り立つ．$\{\widehat{\varphi_n}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ なので $C_{0,1} > 0$ が存在して

$$|\widehat{\varphi_N}(\xi)| \le \frac{C_{0,1}}{1 + |\xi|}$$

が任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．したがって $M = M(\varepsilon, N) > 0$ が存在し $|\xi| \ge M$ ならば

$$|\widehat{\varphi_N}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[*2] $|x| > \epsilon$ ならば $\rho_\epsilon(x) = 0$ である．また $(\rho_\epsilon * (\chi_L f))(x) = \int_{0\le|y|\le L} \rho_\epsilon(x-y)f(y)dy$ となる．したがって $|y| \le L$ と考えれば良いので $|x| > L + \epsilon$ とすれば $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$ という不等式を用いて

$$\begin{aligned} |x-y| &\ge |x| - |y| \\ &> L + \epsilon - L \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

となり $(\rho_\epsilon * \chi_L)(x) = 0$ となる.

以上より $N \geq 1$ を固定しておき $|\xi| \geq M$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi_N}(\xi) + \widehat{\varphi_N}(\xi)\right| \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \|f - \varphi_N\|_{L^1} + |\widehat{\varphi_N}(\xi)| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

□

第9章　L^2におけるフーリエ変換I

$L^2 = L^2(\mathbb{R})$ の内積は

$$(f,g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義される.

定理 17. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}(\widehat{\varphi}, \psi)_{L^2} &= (\varphi, \psi^{\vee})_{L^2}\,, \\ (\varphi^{\vee}, \psi)_{L^2} &= \left(\varphi, \widehat{\psi}\right)_{L^2}.\end{aligned}$$

が成り立つ. とくに

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} &= \|\varphi\|_{L^2}, \\ \|\varphi^{\vee}\|_{L^2} &= \|\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

証明. $(\widehat{\varphi}, \psi)_{L^2} = (\varphi, \psi^{\vee})_{L^2}$ だけ示せば十分である. 積分順序を交換できるので

$$\begin{aligned}(\widehat{\varphi}, \psi)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x)dx \right) \overline{\psi(\xi)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{i\xi x}\psi(\xi)}d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\psi(\xi)d\xi dx} \\ &= (\varphi, \psi^{\vee})_{L^2}\,.\end{aligned}$$

□

この定理より $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\widehat{\psi}(x)dx.$$

となることがわかる[*1].

[*1] 緩増加超関数のフーリエ変換を定義するときにこの式を手本とする.

L^2 におけるフーリエ変換の定義

任意に $f \in L^2$ を選ぶ．稠密性により $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在し L^2 ノルムで f に収束する．このとき $\{\widehat{\varphi_n}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ について

$$\|\widehat{\varphi_n} - \widehat{\varphi_m}\|_{L^2} = \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

なので $\{\widehat{\varphi_n}\}$ は L^2 におけるコーシー列である．L^2 は完備なので $v \in L^2$ が存在し

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi_n} - v\|_{L^2} = 0$$

となる．そこでこの極限点 $v \in L^2$ を f のフーリエ変換と定義する．つまり

$f \in L^2$ に対して L^2 で収束する点列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を用いてフーリエ変換 $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ を

$$\lim_{n\to\infty} \|v - \widehat{\varphi_n}\|_{L^2} = 0$$

なるものとして $v = \widehat{f}$ によって定義する．フーリエ逆変換も同じ様に定義する．

定理 18. $f \in L^2$ のフーリエ変換は f に収束する点列の選び方によらない．

証明. $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ をふたつの f に収束する点列とする．これらのフーリエ変換がそれぞれ v と w に収束するとする．

$$\begin{aligned}\|v - w\|_{L^2} &= \left\|v - \widehat{\varphi_n} + \widehat{\varphi_n} - w + \widehat{\psi_n} - \widehat{\psi_n}\right\|_{L^2} \\ &\leq \|v - \widehat{\varphi_n}\|_{L^2} + \left\|\widehat{\psi_n} - w\right\|_{L^2} + \left\|\widehat{\varphi_n} - \widehat{\psi_n}\right\|_{L^2} \\ &\to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

したがって $v - w = 0$ $(a.e.\ \mathbb{R})$. □

積分で定義されたフーリエ変換が線形であることは明らかであるが, 以下では L^2 におけるフーリエ変換の線形性が証明される．

定理 19. $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ は線形作用素である．すなわち $f, g \in L^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g]$$

が成り立つ．

証明. まず $\mathcal{F}$ は上の議論で L^2 におけるコーシー列の極限点として定義されているので $L^2 \to L^2$ の作用素であることを注意しておこう．点列 $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が L^2 ノルムで $\varphi_n \to f, \psi_n \to g$ ならば同じく $\varphi_n + \psi_n \to f + g$ なので $\widehat{f+g}$ は

$$\lim_{n\to\infty} \left\| v - \left(\widehat{\varphi_n + \psi_n}\right) \right\|_{L^2} = 0$$

なる極限点として定義される.

$$\widehat{\varphi_n + \psi_n} = \widehat{\varphi_n} + \widehat{\psi_n} \to \widehat{f} + \widehat{g} \quad (n \to \infty)$$

なので

$$\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g} \ \ (a.e.\ \mathbb{R})$$

である．同じ様にして

$$\widehat{(\alpha \cdot f)} = \alpha \cdot \widehat{f} \ \ (a.e.\ \mathbb{R}).$$

すなわちフーリエ変換は L^2 における線形作用素である. □

定理 20. $f \in L^2$ に対して, 反転公式 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$ が成り立つ.

証明. $f \in L^2$ に L^2 ノルムで収束する点列を $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする．このときフーリエ変換の定義より $\{\widehat{\varphi_n}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\widehat{f}$ に収束する点列である．$\left(\widehat{f}\right)^\vee$ は $(\widehat{\varphi_n})^\vee$ の極限として定義される．急減少関数に対しては反転公式が成り立ち $(\widehat{\varphi_n})^\vee = \varphi_n$ であり φ_n は f に収束するので極限点の一意性[*2]より $\left(\widehat{f}\right)^\vee = f$ $(a.e.\ \mathbb{R})$. □

[*2] $f, g \in L^2$ を $\{f_n\} \subset L^2$ のふたつの極限点とすると

$$\begin{aligned}\|f - g\|_{L^2} &= \|f - f_n + f_n - g\|_{L^2} \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^2} + \|f_n - g\|_{L^2} \\ &\to 0 \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるので.

第10章　L^2におけるフーリエ変換II

この章では以下の定理を用いる.

単調収束定理

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f_n \geq 0$ かつ $f_n(x) \nearrow f(x),\ x \in \mathbb{R}\ (a.e.),\ (n \to \infty)$ であるとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

が成り立つ.

L^2 におけるフーリエ変換について以下の性質が成り立つ. パーセバルの等式とか L^2 におけるフーリエ変換のユニタリ性と呼ばれることもある.

定理 21. $f, g \in L^2$ に対して

$$\left(\widehat{f}, g\right)_{L^2} = (f, g^{\vee})_{L^2}\,,$$
$$(f^{\vee}, g)_{L^2} = (f, \widehat{g})_{L^2}\,.$$

が成り立つ. とくに

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$
$$\|f^{\vee}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

証明. $f, g \in L^2$ とする. $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ をそれぞれ f, g に収束する点列とする. このとき, ヘルダー不等式（コーシー・シュワルツの不等式）より

$$\begin{aligned}
\left|(f, g^{\vee})_{L^2} - (\varphi_n, {\psi_n}^{\vee})_{L^2}\right| &= \left|(f, g^{\vee} - {\psi_n}^{\vee})_{L^2} + (f - \varphi_n, {\psi_n}^{\vee})_{L^2}\right| \\
&\leq \|f\|_{L^2}\, \|g^{\vee} - {\psi_n}^{\vee}\|_{L^2} + \|f - \varphi_n\|_{L^2}\, \|{\psi_n}^{\vee}\|_{L^2} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\left| \|{\psi_n}^{\vee}\|_{L^2} - \|g^{\vee}\|_{L^2} \right| \leq \|{\psi_n}^{\vee} - g^{\vee}\|_{L^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので $\{\|{\psi_n}^{\vee}\|\} \subset \mathbb{R}$ は収束列であるから有界であることに注意. 以上より

$$(\widehat{\varphi_n}, \psi)_{L^2} - (f, g^{\vee})_{L^2} = (\varphi, {\psi_n}^{\vee})_{L^2} - (f, g^{\vee})_{L^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

一方, 左辺は

$$(\widehat{\varphi_n}, \psi)_{L^2} - (f, g^\vee)_{L^2} \to \left(\widehat{f}, g\right)_{L^2} - (f, g^\vee)_{L^2} \quad (n \to \infty).$$

すなわち極限値の一意性より

$$\left(\widehat{f}, g\right)_{L^2} - (f, g^\vee)_{L^2} = 0.$$

□

定理 22. $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ は全単射である.

証明. $f, g \in L^2$ とする. $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$ とすると $\widehat{f-g} = 0$ $(a.e.\ \mathbb{R})$ なので $0 = \left\|\widehat{f-g}\right\|_{L^2} = \|f-g\|_{L^2}$. よって $f = g$ $(a.e.\ \mathbb{R})$ なので単射である. 次に全射であることを示していく. $g \in L^2$ とする. $\{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を g に収束する点列とする. $\varphi_n = {\psi_n}^\vee$ とおく. このとき

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2} = \|{\psi_n}^\vee - {\psi_m}^\vee\|_{L^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

なので

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_{L^2} = 0$$

なる $f \in L^2$ が存在する.

$$\|\varphi_n - f\|_{L^2} = \left\|\widehat{\varphi_n} - \widehat{f}\right\|_{L^2} = \left\|\psi_n - \widehat{f}\right\|_{L^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって $\mathcal{F}[f] = \widehat{f} = g$ $(a.e.\ \mathbb{R})$ となり全射であることが示された. □

L^2 におけるフーリエ変換の表示

L^2 の関数は必ずしも可積分でないことに注意しよう. 実際, 関数

$$f(x) = (1 + |x|)^{-2/3},\ x \in \mathbb{R}$$

は $f \in L^2$ かつ $f \notin L^1$ である. L^1 や $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ においてはフーリエ変換は積分として具体的な表示をもって定義されていた. ところが L^2 におけるフーリエ変換は急減少関数のフーリエ変換の極限として定義されているので具体的な表示がどの様なものかわからない. 以下の定理はその様な疑問にこたえるものである.

定理 23. $f \in L^2$ に対するフーリエ変換とフーリエ逆変換は以下の L^2 における極限

$$\lim_{R\to\infty} \left\|\widehat{f} - (2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x} f(x)dx\right\|_{L^2} = 0,$$
$$\lim_{R\to\infty} \left\|f^\vee - (2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^{R} e^{i\xi x} f(\xi)d\xi\right\|_{L^2} = 0$$

によって表すことができる.

証明. まず定理を証明するために準備をする．$\psi \in L^1 \cap L^2$ とすると L^1 としてフーリエ変換

$$\widehat{\psi} = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \psi(x) dx$$

を定義できる．ここでは L^2 のフーリエ変換と同じ記号を使っているが ψ のフーリエ変換は積分であることに注意．

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\psi(x)dx\right) \overline{\left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}\psi(y)dy\right)} d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)\xi - t\xi^2} d\xi\right) \overline{\psi(y)} dy\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi_t(x)} dx.
\end{aligned}$$

ここで $\psi_t = U_t * \psi$ のことで

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi_t(x)} dx - \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \right| \leq \|\psi\|_{L^2} \|\psi_t - \psi\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to 0)$$

なので右辺は $\|\psi\|_{L^2}^2 < \infty$ に収束する．また $t = 1/k$ を代入して単調収束定理より

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1/k)\xi^2} \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

以上より $\psi \in L^1 \cap L^2$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty$$

であり

$$\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$$

となることがいえた．この事実を用いて定理の証明をしていく．$f \in L^2$ に対して

$$f_n = \chi_n f \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とすると $\{f_n\} \subset L^1 \cap L^2$ であり L^2 ノルムで $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ である．したがって L^1 の意味でのフーリエ変換について $\left\{\widehat{f_n}\right\} \subset L^2$ はコーシー列なので

$$\lim_{n \to \infty} \left\|\widehat{f_n} - g\right\|_{L^2} = 0$$

なる $g \in L^2$ が存在する．$f \in L^2$ に収束する $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする．

$$\lim_{n \to \infty} \|v - \widehat{\varphi_n}\|_{L^2} = 0$$

によって定義される L^2 の意味でのフーリエ変換 $\widehat{f}=v$ が g と等しいことを示せば良い.

$$\begin{aligned}\left\|g-\widehat{f}\right\|_{L^2} &\le \left\|g-\widehat{f_n}\right\|_{L^2}+\left\|\widehat{f_n}-\widehat{\varphi_n}\right\|_{L^2}+\left\|\widehat{\varphi_n}-\widehat{f}\right\|_{L^2}\\ &=\left\|g-\widehat{f_n}\right\|_{L^2}+\|f_n-\varphi_n\|_{L^2}+\left\|\widehat{\varphi_n}-\widehat{f}\right\|_{L^2}\\ &\to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

したがって $g=\widehat{f}$ in L^2 なので

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\widehat{f}-\widehat{f_n}\right\|_{L^2}=\lim_{n\to\infty}\left\|\widehat{f}-(2\pi)^{-1/2}\int_{|x|\le n}e^{-i\xi x}f(x)dx\right\|_{L^2}=0$$

となる. したがって

$$\lim_{R\to\infty}\left\|\widehat{f}-(2\pi)^{-1/2}\int_{|x|\le R}e^{-i\xi x}f(x)dx\right\|_{L^2}=0.$$

□

$f\in L^1\cap L^2$ であれば L^1 の意味でのフーリエ変換と L^2 の意味でのフーリエ変換は $a.e.$ $\mathbb{R}$ で一致する. 実際, 上の証明の前半の結果を用いると

$$\begin{aligned}&\left\|(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}f(x)dx-(2\pi)^{-1/2}\int_{-R}^{R}e^{-i\xi x}f(x)dx\right\|_{L^2}\\ &=\left\|(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}f(x)dx-(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}\chi_R(x)f(x)dx\right\|_{L^2}\\ &=\left\|(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}\left(f(x)-\chi_R(x)f(x)\right)dx\right\|_{L^2}\\ &=\|f-\chi_R f\|_{L^2}\\ &\to 0\ (R\to\infty)\end{aligned}$$

となるからである.

第III部

超関数とその応用

第11章　緩増加超関数のフーリエ変換

この章では以下の定理を用いる.

変分法の基本補題

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ とする.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

が任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して成り立つとする. このとき $f = 0$ $(a.e.\ \mathbb{R})$.

緩増加超関数

点列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ への $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の意味における収束は

$$p_N(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^N \sum_{k=0}^{N} \left|\varphi^{(k)}(x)\right| \quad (N \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

と定義したものに対して

$$\lim_{n\to\infty} (p_N(\varphi_n - \varphi)) = 0$$

が任意の $N \geq 0$ に対して成り立つものと定義する.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の上で定義された写像 $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$ が以下の条件をみたすとき緩増加超関数であるといい, その集合を $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とかく.

(1) 任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle + \beta\langle T, \psi\rangle.$$

(2) $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が $T = 0$ であるとは, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\langle T, \varphi \rangle = 0$$

をみたすことをいう.

$T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \alpha T, \varphi \rangle &= \langle T, \alpha \varphi \rangle, \\ \langle T + S, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle \end{aligned}$$

と定義する. これにより $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ はベクトル空間となる.

今後, 緩増加超関数を単に超関数ということがある.

$1 \leq p \leq \infty$ に対して $f \in L^p$ は

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

によってひとつの超関数を定める. 実際, 線形性は明らかであろう. 次に

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| (1 + |x|)^{-2} (1 + |x|)^2 \sum_{k=0}^{2} \left| \varphi^{(k)}(x) \right| dx \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|(1 + |x|)^{-2}\|_{L^{p'}} p_2(\varphi) \\ &= C p_2(\varphi) \end{aligned}$$

となるので連続であることも確かめられた.

以上により $f \in L^p$ は超関数を定めることが確かめられたが以下の定理によって T_f と f を同一視することが可能である.

定理 24. $1 \leq p \leq \infty$ とする. $f, g \in L^p$ であるとする. このとき

$$T_f = T_g$$

ならば

$$f = g \ (a.e.\ \mathbb{R})$$

が成り立つ. この逆も成り立つ.

証明. $T_f = T_g$ を仮定すると

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx$$

が任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ．$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ なのでとくに

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\psi(x)dx$$

が任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して成り立つ．変分法の基本補題より主張を得る．逆は定義より直ちに得られる． □

以上の命題により今後 $f \in L^p$ の定める超関数 T_f を単に f と書くことがある．

緩増加超関数のフーリエ変換

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ のフーリエ変換 $\mathcal{F} : T \mapsto \widehat{T}$ を

$$\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

によって定義する．フーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1} : T \mapsto T^\vee$ も同様に定義される．

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して上の様に定義した $\widehat{T}$ は $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ であることは簡単に確かめられる．

注意 7. $f \in L^p$ で L^1 や L^2 に属さない関数が存在する．$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ なので超関数としてフーリエ変換を定義することができる．これが超関数を導入した動機のひとつである．

定理 25. $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする．このとき

$$\mathcal{F}[\alpha T + \beta S] = \alpha \mathcal{F}[T] + \beta \mathcal{F}[S]$$

が成り立つ．

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう． □

次のふたつの事実は重要である．

定理 26. $f \in L^1$ の緩増加超関数としてのフーリエ変換と L^1 における意味でのフーリエ変換は一致する．

証明. $f \in L^1$ とすれば

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{T_f}, \varphi \right\rangle &= \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \left\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

ここで $\widehat{f}$ は L^1 の意味でのフーリエ変換である. □

定理 27. $f \in L^2$ の緩増加超関数としてのフーリエ変換と L^2 における意味でのフーリエ変換は一致する.

証明. $f \in L^2$ とする. f に L^2 ノルムで収束する点列 $\{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする. このとき $\widehat{f}$ は $\left\{\widehat{\psi_n}\right\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の極限点として定義される.

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{T_f}, \varphi \right\rangle &= \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi_n}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \left\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

ここで $\widehat{f}$ は L^2 の意味でのフーリエ変換である. □

定理 28. 以下のことが成り立つ.

(1) 反転公式 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[T] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[T] = T$ が任意の $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して成り立つ.

(2) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は全単射である. フーリエ逆変換に関しても同様である.

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう. □

超関数の収束

点列 $\{T_n\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

を満たすものと定義する.

定理 29. 点列 $\{T_n\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の意味で $T_n \to T$ $(n \to \infty)$ ならば $\widehat{T_n} \to \widehat{T}$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう. □

導超関数

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の導超関数 $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

によって定義する. 高階導超関数はこの定義を繰り返し適用したものとして定義する.

注意 8. 任意の超関数に対して導超関数を定義できる.

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して $x \cdot T = T \cdot x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は

$$\langle x \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, x \cdot \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

によって定義される.

定理 30. 任意の $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して以下の式が成り立つ.

(1) $\widehat{T'} = i\xi \cdot \widehat{T}$.

(2) $\left(\widehat{T}\right)' = \widehat{-ix \cdot T}$.

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう. □

積と合成積

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ と $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して積 $T \cdot \varphi$ と合成積 $T * \varphi$ を

$$\langle T \cdot \varphi, \psi \rangle = \langle T, \varphi \cdot \psi \rangle \quad (\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})),$$
$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - \cdot)\psi(y)dy \right\rangle \quad (\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

によって定義する.

上の定義において $\varphi(y-x) = \varphi(-(x-y))$ であるが $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $\varphi(-\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であることに注意. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を固定して $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\widetilde{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおいたときに $\widetilde{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であること及び点列 $\{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ について

$$\lim_{n\to\infty} p_N(\psi_n - \psi) = 0 \quad (\forall N \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} p_M\left(\widetilde{\psi_n} - \widetilde{\psi}\right) = 0 \quad (\forall M \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

が成り立つことが確かめられる[*1].

定理 31. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば

$$\widehat{T * \varphi} = (2\pi)^{1/2}\widehat{T} \cdot \widehat{\varphi}$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{T * \varphi}, \psi \right\rangle &= \left\langle T * \varphi, \widehat{\psi} \right\rangle \\
&= \left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - \cdot)\widehat{\psi}(y)dy \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{T}\right)^{\vee}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - \cdot)\widehat{\psi}(y)dy \right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{T}, \mathcal{F}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - \cdot)\widehat{\psi}(y)dy \right\rangle.
\end{aligned}$$

[*1] この説明は煩雑なので補遺で行う.

ここで $\varphi(-\cdot)^\vee = \widehat{\varphi}$ であることを用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(y-\cdot)\widehat{\psi}(y)dy\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\varphi(-\cdot) * \widehat{\psi}\right] \\ &= (2\pi)^{1/2}\varphi(-\cdot)^\vee \cdot \psi \\ &= (2\pi)^{1/2}\widehat{\varphi}\cdot\psi.\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{T*\varphi}, \psi \right\rangle &= \left\langle \widehat{T}, \mathcal{F}^{-1}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y-\cdot)\widehat{\psi}(y)dy \right\rangle \\ &= \left\langle \widehat{T}, (2\pi)^{1/2}\widehat{\varphi}\cdot\psi \right\rangle \\ &= \left\langle (2\pi)^{1/2}\widehat{T}\cdot\widehat{\varphi}, \psi \right\rangle.\end{aligned}$$

□

デルタ関数

デルタ関数

$a \in \mathbb{R}$ を定数とする．デルタ関数と呼ばれる超関数 $\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

と定義する．

定理 32. デルタ関数に関して以下が成り立つ．

(1) $\widehat{\delta_a} = (2\pi)^{-1/2}e^{-ia\xi}$.

(2) $\widehat{e^{iax}} = (2\pi)^{1/2}\delta_a$.

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう． □

定理 33. ヘヴィサイドの階段関数を

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

と定義する．このとき $H' = \delta_0$ である．

証明. 計算練習も兼ねて自分で証明してみよう． □

第12章　自由シュレディンガー方程式

この章では以下の事実を用いる．

$t \in \mathbb{R}$ とする．$\epsilon > 0$ に対し $f_\epsilon(\xi) = e^{-i(t/2-i\epsilon)|\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$ とする．このとき次を得る．

$$\left(e^{-i(t/2-i\epsilon)|\xi|^2}\right)^\vee(x) = (it+2\epsilon)^{-1/2}e^{-|x|^2/(2it+4\epsilon)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$f_\epsilon \in L^1$ である．本来の目的から逸脱してしまうので補遺で説明をする．

自由シュレディンガー方程式

自由シュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\partial_x^2 u = 0 & (\text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ u(0,x) = \phi(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

について考える．$t = 0$ において初期条件として与えられた関数 ϕ を初期値といい，与えられた初期値に対して微分方程式を解く問題を初期値問題という．

ここでは初期値に対して $\phi \in L^2$ と仮定して解 $u = u(t,x)$ を構成する方法を説明する．

解の構成

次の補題を紹介する．

補題 7. $t \neq 0$ とする．関数 $f(\xi) = e^{-i(t/2)|\xi|^2}$ $(\xi \in \mathbb{R})$ とする．このとき緩増加超関数の意味でのフーリエ逆変換について

$$(T_f)^\vee = T_{(it)^{-1/2}e^{i|x|^2/2t}}.$$

証明. $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ なので緩増加超関数 T_f が定まる．$\epsilon > 0$ に対し $f_\epsilon(\xi) = e^{-i(t/2-i\epsilon)|\xi|^2}$, $\xi \in$

$\mathbb{R}$ を考える．$f_\epsilon \in L^1$ なので緩増加超関数 T_{f_ϵ} が定まるのでフーリエ変換の定義より

$$\begin{aligned}\langle (T_{f_\epsilon})^\vee, \varphi\rangle &= \langle T_{f_\epsilon}, \varphi^\vee\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x)\varphi^\vee(x)dx \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi^\vee(x)dx \ (\epsilon \to 0) \\ &= \langle T_f, \varphi^\vee\rangle \\ &= \langle (T_f)^\vee, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}\langle (T_{f_\epsilon})^\vee, \varphi\rangle &= \langle T_{f_\epsilon^\vee}, \varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} (it+2\epsilon)^{-1/2} e^{-|x|^2/(2it+4\epsilon)}\varphi(x)dx \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t}\varphi(x)dx \ (\epsilon \to 0) \\ &= \left\langle T_{(it)^{-1/2}e^{i|x|^2/2t}}, \varphi\right\rangle \ .\end{aligned}$$

これより求める式を得る． □

シュレディンガー方程式の両辺に対して超関数の意味におけるフーリエ変換を施すと

$$\left\langle i\partial_t \widehat{u}(t) - \frac{1}{2}|\xi|^2\widehat{u}(t), \varphi\right\rangle = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

を任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して得る．このとき φ の任意性より

$$\left\langle i\partial_t \left(e^{i\frac{t}{2}|\xi|^2}\widehat{u}\right)(t), \varphi\right\rangle = 0$$

となるので

$$i\frac{d}{dt}\left\langle e^{i\frac{t}{2}|\xi|^2}\widehat{u}(t), \varphi\right\rangle = 0.$$

これを解くと

$$\left\langle e^{i\frac{t}{2}|\xi|^2}\widehat{u}(t), \varphi\right\rangle = \left\langle \widehat{\phi}, \varphi\right\rangle$$

を得る．これより

$$\langle \widehat{u}(t), \varphi\rangle = \left\langle e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}\widehat{\phi}, \varphi\right\rangle.$$

したがって超関数のフーリエ変換の反転公式より

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i(t/2)|\xi|^2}\widehat{\phi}\right](x) \quad ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}).$$

以上より $u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ なる解を得ることができた．ここで超関数値関数

$$T(t,\cdot) : t \in \mathbb{R} \mapsto T(t,\cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

の微分

$$v(t,\cdot) = \partial_t T(t,\cdot) \quad (t \in \mathbb{R})$$

は

$$\lim_{h \to 0} \left\langle \frac{T(t+h,\cdot) - T(t,\cdot)}{h} - v(t,\cdot), \varphi \right\rangle = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

なる極限として定義されている．また $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して $e^{ia|x|^2} \cdot T$ は

$$\left\langle e^{ia|x|^2} \cdot T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, e^{ia|x|^2} \cdot \varphi \right\rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

と定義される．

次に解の表示の公式を求めよう．そのために積のフーリエ逆変換に対して合成積の公式を適用したいので以下の議論では滑らかな関数で初期値を近似する．すなわち $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を L^2 ノルムで $\phi \in L^2$ に収束する点列とする．このとき

$$u_n(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i(t/2)|\xi|^2}\widehat{\phi_n}\right](x) \quad ((t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

は

$$\lim_{n \to \infty} \|u(t) - u_n(t)\|_{L^2} = 0$$

を満たす．超関数と急減少関数の合成積に対するフーリエ変換の公式

$$\widehat{T * \varphi} = (2\pi)^{1/2}\widehat{T} \cdot \widehat{\varphi}$$

より

$$(v \cdot \widehat{w})^\vee = (2\pi)^{-1/2} v^\vee * w$$

となるので

$$u_n = (2\pi)^{-1/2}\left(e^{-i(t/2)|\xi|^2}\right)^\vee * \phi_n$$

を得る．上の補題より

$$u_n(t,x) = (2\pi i t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i|x-y|^2/2t}\phi_n(y)dy \quad (t \neq 0,\ x \in \mathbb{R})$$

となる．$t \neq 0$ に対して $M(t)$, $D(t)$ をそれぞれ

$$M(t)f(x) = e^{i|x|^2/2t}f(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$D(t)f(x) = (it)^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定義する．これらは

$$\|M(t)f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}, \quad \|D(t)f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

を任意の $f \in L^2$ に対して満たすことがわかる．これを用いて

$$\begin{aligned} u_n(t,x) &= (2\pi i t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i|x-y|^2/2t} \phi_n(y) dy \\ &= (2\pi i t)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy/t} e^{i|y|^2/2t} \phi_n(y) dy \\ &= M(t)D(t)\mathcal{F}\left[M(t)\phi_n\right](x) \end{aligned}$$

と書ける．また $D(t)$ の逆作用素は $D^{-1}(t) = iD\left(t^{-1}\right)$ である．したがって

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \|u(t) - u_n(t)\|_{L^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|u(t) - M(t)D(t)\mathcal{F}\left[M(t)\phi_n\right]\|_{L^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\|iD\left(t^{-1}\right)M(-t)u(t) - \mathcal{F}\left[M(t)\phi_n\right]\right\|_{L^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る．$\{M(t)\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $M(t)\phi$ に L^2 ノルムで収束するので L^2 におけるフーリエ変換の意味で

$$iD(t^{-1})M(-t)u(t) = \mathcal{F}[M(t)\phi]$$

である．したがって

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} \left\| u(t) - (2\pi i t)^{-1/2} \int_{-R}^{R} e^{i|x-y|^2/2t} \phi(y) dy \right\|_{L^2} = 0, \\ &u(t) = M(t)D(t)\mathcal{F}[M(t)\phi] \end{aligned}$$

ここで $t \neq 0$. また初期値が $L^1 \cap L^2$ に属す場合は

$$u(t) = (2\pi i t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i|x-y|^2/2t} \phi(y) dy, \ \phi \in L^1 \cap L^2 \quad (t \neq 0).$$

自由シュレディンガー方程式の解を与える作用素 $U = U(t)$ を

$$U(t)f = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i(t/2)|\xi|^2} \widehat{f}\right] \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定義する．$U(t),\ t \in \mathbb{R}$ はシュレディンガー発展作用素と呼ばれるものである．

解の基本的な性質

定理 34. $\phi \in L^2$ とする．以下が成り立つ．

(1) $U(t+s)\phi = U(t)\left(U(s)\phi\right)\ \ (t, s \in \mathbb{R})$.

(2) $U(0)\phi = \phi$.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \|U(t)\phi - \phi\|_{L^2} = 0$.

証明. (1) $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I$ なので

$$
\begin{aligned}
U(t+s)\phi &= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i((t+s)/2)|\xi|^2}\mathcal{F}[\phi]\right] \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i(t/2)|\xi|^2}e^{-i(s/2)|\xi|^2}\mathcal{F}[\phi]\right] \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i(t/2)|\xi|^2}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}e^{-i(s/2)|\xi|^2}\mathcal{F}[\phi]\right]\right] \\
&= U(t)\left(U(s)\phi\right).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
U(0)\phi &= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i(0/2)|\xi|^2}\mathcal{F}[\phi]\right] \\
&= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\phi] \\
&= \phi.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\left(U(t)\phi\right)(x) - \phi(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(e^{-i(t/2)|\xi|^2} - 1\right)\widehat{\phi}\right](x)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\left(e^{-i(t/2)|\xi|^2} - 1\right)\widehat{\phi}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\to 0\ (t \to 0).
\end{aligned}
$$

ここでフーリエ変換の L^2 におけるユニタリ性を用いた．また最後の極限操作ではルベーグ収束定理を用いた．

□

定理 35. $\phi \in L^2$ に対して

$$
\lim_{t\to\pm\infty} \left\|U(t)\phi - (it)^{-1/2}e^{i|x|^2/2t}\widehat{\phi}\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right\|_{L^2} = 0
$$

が成り立つ．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ とする．$N = N(\varepsilon) \geq 1$ が存在し $n \geq N$ ならば

$$\|\phi - \phi_n\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．とくに $n = N$ に対して成り立つ．$\phi \in L^2$ に L^2 ノルムで収束する点列を $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする．これに対して

$$\begin{aligned} U(t)\phi_n - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_n}\left(\frac{\cdot}{t}\right) &= M(t)D(t)\mathcal{F}M(t)\phi_n - M(t)D(t)\mathcal{F}\phi_n \\ &= M(t)D(t)\mathcal{F}(M(t)-1)\phi_n \end{aligned}$$

となる．また

$$\begin{aligned} |M(t) - 1| &= \left| e^{i|x|^2/2t} - 1 \right| \\ &= \left| e^{i|x|^2/4t}(e^{i|x|^2/4t} - e^{-i|x|^2/4t}) \right| \\ &= 2\left|\sin(|x|^2/4t)\right| \\ &\leq \frac{|x|^2}{2|t|} \quad (t \neq 0) \end{aligned}$$

と評価できる．これより $L = L(\varepsilon, N) > 0$ が存在し $|t| \geq L$ ならば

$$\begin{aligned} \left\| U(t)\phi_N - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_N}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right\|_{L^2} &\leq C|t|^{-1} \||x|^2\phi_N\|_{L^2} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

したがって $|t| \geq L$ ならば

$$\begin{aligned} &\left\| U(t)\phi - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right\|_{L^2} \\ &= \Bigg\| U(t)\phi - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi}\left(\frac{\cdot}{t}\right) - \left(U(t)\phi_N - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_N}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right) \\ &\qquad + \left(U(t)\phi_N - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_N}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right) \Bigg\|_{L^2} \\ &\leq \|U(t)\phi - U(t)\phi_N\|_{L^2} + \left\| (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi}\left(\frac{\cdot}{t}\right) - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_N}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right\|_{L^2} \\ &\qquad + \left\| U(t)\phi_N - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_N}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right\|_{L^2} \\ &= 2\|\phi - \phi_N\|_{L^2} + \left\| U(t)\phi_N - (it)^{-1/2} e^{i|x|^2/2t} \widehat{\phi_N}\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right\|_{L^2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

第IV部

付録

付 録 A

ほとんどいたるところ

ほとんどいたるところ

部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して区間の列 $\{I_k\}$ が存在し

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$$

がなりたつとき A を零集合という. ここで区間 $I \subset \mathbb{R}$ の長さを $|I|$ とした. ある命題 $P(x)$ が零集合に属する点を除いて成り立つとき, ほとんどいたるところ成り立つという. そのことを

$$P(x),\ (a.e.),\quad P(x),\ a.a.\ x \in \mathbb{R}$$

とかいたりする.

例 8. 可算部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は零集合である. 実際に可算部分集合を $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$I_k = \left[a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right),\ k \geq 1$$

とすれば

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

となるからである.

L^p の完備性

ノルム空間

$K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上の線形空間 X において次の条件をみたす $\|\cdot\|_X$ をノルムという.

(i) $\|f\|_X \geq 0,\ \|f\|_X = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

(ii) $\|\alpha f\|_X = |\alpha|\,\|f\|_X\,,\ \alpha \in K,\ f \in X$

(iii) $\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X\,,\quad f, g \in X$

ノルムの定義された線形空間をノルム空間という.

バナッハ空間

$K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上のノルム空間 X が完備であるとは任意のコーシー列が X に極限点 $f \in X$ をもつことである. すなわち $\{f_n\} \subset X$ が

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_X = 0$$

を満たすならば $f \in X$ が存在し

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_X = 0$$

が成り立つことをいう. 完備なノルム空間をバナッハ空間という.

注意 9. $X = C([0,1])$ においてノルムを積分

$$\|f\|_{X,1} = \int_0^1 |f(x)|dx$$

として定めると X は完備にならないことが知られている．すなわちあるコーシー列に対して極限点が X に属さないことが示されるのである[a]．しかしノルムを最大値ノルム

$$\|f\|_{X,0} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

として定めると完備となることが知られている．

[a]実際に

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1/2) \\ 1 - 2^n(x - 1/2) & (1/2 \le x \le 1/2 + 1/2^n) \\ 0 & (1/2 + 1/2^n \le x \le 1) \end{cases}$$

と定義すると $n > m$ として, 積分が図形の面積であることに注意すると

$$\|f_n - f_m\|_{X,1} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

を得る．したがってコーシー列である．ところが f_n の極限点は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1/2) \\ 0 & (1/2 < x \le 1) \end{cases}$$

という不連続関数である．

L^p の完備性を証明しよう．その前に補題を紹介する．

補題 8. $1 \le p \le \infty$ とする． $f_i \in L^p$ かつ $\sum_{i=1}^\infty \|f_i\|_{L^p} < \infty$ ならば $\sum_{i=1}^\infty f_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $(a.e.)$ は収束し $\sum_{i=1}^\infty f_i \in L^p$ で

$$\left\|\sum_{i=1}^\infty f_i\right\|_{L^p} \le \sum_{i=1}^\infty \|f_i\|_{L^p}$$

が成り立つ．

証明. $1 \le p < \infty$ とする．

$$\left(\sum_{i=1}^n |f_i|\right)^p \nearrow \left(\sum_{i=1}^\infty |f_i|\right)^p$$

なので

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|\right)^p dx\right)^{1/p} = \left(\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|\right)^p dx\right)^{1/p}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|\right\|_{L^p}$$
$$\le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^p}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{L^p} < \infty.$$

したがって $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ は収束し主張が示せた．$p=\infty$ の場合はほとんど明らかである． □

定理 36. $1 \le p \le \infty$ に対して L^p は完備である．

$\{f_n\} \subset L^p$ をコーシー列とする．すなわち

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n - f_m\|_{L^p} = 0.$$

このとき $n_1, n_2, \cdots$ が存在し次が成り立つ

$$n_i < n_{i+1}, \quad \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{L^p} < \frac{1}{2^i}.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{L^p} < \infty$$

なので上の補題より

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) \in L^p < \infty.$$

したがって

$$f = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

とおけば $f \in L^p$. さらに

$$f - f_{n_k} = \sum_{i=k}^{\infty}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

なので

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_{L^p} \le \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{L^p} \le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

$\{f_n\}$ がコーシー列なので

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} \le \lim_{n,k\to\infty} \left(\|f_n - f_{n_k}\|_{L^p} + \|f_{n_k} - f\|_{L^p}\right) = 0.$$

これでコーシー列が収束することがいえた.

急減少関数の合成積の性質

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を固定して $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\widetilde{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)dy,\ x \in \mathbb{R}$$

と定める. まず

$$\widetilde{\psi}^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(k)}(x-y)\psi(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi^{(k)}(y)dy,\ x \in \mathbb{R}$$

を示そう. $k=1$ の場合について

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x-y)\psi(y)\right)\right| \le C \cdot p_1(\varphi)|\psi(y)| \in L^1_y$$

なので積分記号下で微分をすることが正当化され目的の式が示される. $k \ge 1$ に対する高階微分に関しても同様である. また合成積の交換法則 $\varphi * \psi = \psi * \varphi$ によりもう一方の式も得られる. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすると, 任意の $k, m, N \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}(1+|x|)^m \left|\phi^{(k)}(x)\right| &\le (1+|x|)^{m+k} \sum_{l=0}^{m+k} \left|\phi^{(l)}(x)\right| \\ &\le p_{m+k}(\phi),\ x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}p_N(\phi) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^N \sum_{k=0}^{N} \left|\phi^{(k)}(x)\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{N} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^N \left|\phi^{(k)}(x)\right| \\ &\le C_N\end{aligned}$$

が成り立つ. 以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N &\le (1+|x-y|+|y|)^N \\ &\le (1+|x-y|)^N(1+|y|)^N.\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}&(1+|x|)^N \sum_{k=0}^{N} \left|\widetilde{\psi}^{(k)}(x)\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^N \sum_{k=0}^{N} \left|\varphi^{(k)}(x-y)\right| \cdot |\psi(y)|\, dy \\ &\le \int_{\mathbb{R}} (1+|x-y|)^N \sum_{k=0}^{N} \left|\varphi^{(k)}(x-y)\right| \cdot (1+|y|)^N\, |\psi(y)|\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|x-y|)^N \sum_{k=0}^{N} \left|\varphi^{(k)}(x-y)\right| \cdot (1+|y|)^{-2} \cdot (1+|y|)^{N+2}\, |\psi(y)|\, dy \\ &\le p_N(\varphi)\cdot p_{N+2}(\psi),\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

したがって $\widetilde{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 同様にして

$$\lim_{n\to\infty} p_N(\psi_n - \psi) = 0,\ \forall N \ge 0$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} p_M\left(\widetilde{\psi_n} - \widetilde{\psi}\right) = 0,\ \forall M \ge 0$$

であることが示される.

複素係数をもつガウス関数のフーリエ変換

$t \in \mathbb{R}$ とする. 以下の式

$$\left(e^{-i(t/2-i\epsilon)|\xi|^2}\right)^{\vee}(x) = (it+2\epsilon)^{-1/2} e^{-|x|^2/(2it+4\epsilon)},\ x\in\mathbb{R}.$$

が成り立つことを示そう. それには $\alpha = a+ib \in (0,\infty)+i\mathbb{R}$ に対して

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-\alpha|x|^2} dx = (2\alpha)^{-1/2} e^{-|\xi|^2/4\alpha},\ \xi\in\mathbb{R}$$

を示せば十分である. 実係数をもつガウス関数については

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-a|x|^2} dx = (2a)^{-1/2} e^{-|\xi|^2/4a}$$

である. $\xi \in \mathbb{R}$ を固定して関数 g, h を

$$
\begin{aligned}
g(a) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-a|x|^2} dx, \ a > 0, \\
h(a) &= (2a)^{-1/2} e^{-|\xi|^2/4a}, \ a > 0
\end{aligned}
$$

と定義する. $g(a) = h(a), \ a > 0$ が成り立っており両者ともに解析接続

$$
\begin{aligned}
g(a+ib) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-(a+ib)|x|^2} dx, \ a > 0, \ b \in \mathbb{R}, \\
h(a+ib) &= (2(a+ib))^{-1/2} e^{-|\xi|^2/4(a+ib)}, \ a > 0, \ b \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

をもつ. したがって一致の定理より $g(a+ib) = h(a+ib), \ a > 0, \ b \in \mathbb{R}$. すなわち

$$
(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-\alpha|x|^2} dx = (2\alpha)^{-1/2} e^{-|\xi|^2/4\alpha}, \ \alpha \in (0, \infty) + i\mathbb{R}.
$$

参考文献

[1] 猪狩 惺, 実解析入門, 岩波書店

[2] 伊藤 清三, ルベーグ積分入門, 裳華房

[3] 磯崎 洋, 超関数・フーリエ変換入門, サイエンス社

[4] 小川 卓克, 応用微分方程式, 朝倉書店

[5] 垣田高夫, シュワルツ超関数入門, 日本評論社

[6] 倉田 和浩, フーリエ解析の基礎と応用, 数理工学社

[7] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版

[8] 柴田 良弘, ルベーグ積分論, 内田老鶴圃

[9] 洲之内 治男, ルベーグ積分入門, 内田老鶴圃

[10] 洲之内 治男, 関数解析入門, サイエンス社

[11] 鶴見 茂, 現代解析学序説, 共立出版

[12] 増田久弥, 関数解析, 裳華房

[13] 松澤 忠人, 原 優, 小川 吉彦 共著, 積分論と超関数論入門, 学術図書出版

[14] 宮寺 功, 関数解析, 理工学社